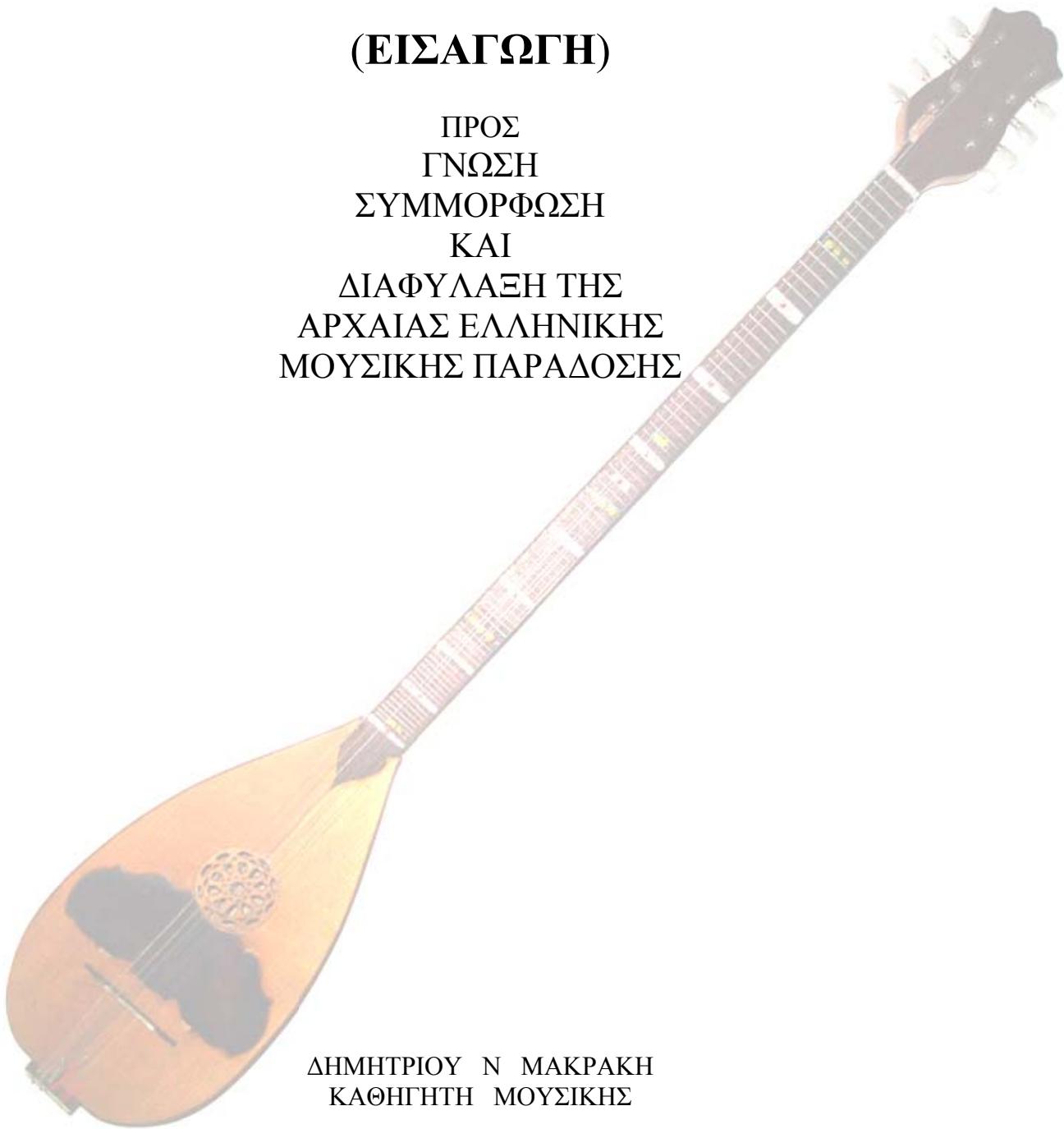


ΑΡΜΟΝΙΚΟ ΕΓΧΕΙΡΙΔΙΟ

(ΕΙΣΑΓΩΓΗ)

ΠΡΟΣ
ΓΝΩΣΗ
ΣΥΜΜΟΡΦΩΣΗ
ΚΑΙ
ΔΙΑΦΥΛΑΞΗ ΤΗΣ
ΑΡΧΑΙΑΣ ΕΛΛΗΝΙΚΗΣ
ΜΟΥΣΙΚΗΣ ΠΑΡΑΔΟΣΗΣ



ΔΗΜΗΤΡΙΟΥ Ν ΜΑΚΡΑΚΗ
ΚΑΘΗΓΗΤΗ ΜΟΥΣΙΚΗΣ

Περιεχόμενα

Σελίδα

1. Η ασθένεια της μουσικής μας.....	4
2. Η λύση του προβλήματος.....	5
3. Γνωστές διαιρέσεις της οκτάβας.....	6
4. Πλάτων και πυθαγόρεια κλίμακα.....	8
5. Η προσφορά του Αριστόξενου.....	12
6. Υπολογίζοντας το λάθος στο πείραμα του Αριστόξενου	14
7. Το μυστηριώδες εναρμόνιο πυκνό.....	17
8. Τα διάφορα χρωματικά πυκνά.....	18
9. Τα λάθη του Χρύσανθου και της Επιτροπής και η θέση του Σίμωνα Καρά.....	19
10. Παραπέρα λάθη ανοχής εξαιτίας των 12 μορίων του μείζονα τόνου.....	21
11. Συνέχεια στην κατατομή του κανόνα	23
12. Κατατομή του κανόνα με τη χρήση του 5 ^{ον} αρμονικού.....	29
13. Αναζητώντας τον κατάλληλο συγκερασμό.....	31
14. Τι δεν μας είπαν για τον Χρύσανθο.....	35
15. Εν κατακλείδι.....	40
16. Βιβλιογραφία.....	44

1. Η ΑΣΘΕΝΕΙΑ ΤΗΣ ΜΟΥΣΙΚΗΣ ΜΑΣ

Η νέα μέθοδος της εκκλησιαστικής μας μουσικής, όπως λέει ο εισηγητής της Χρύσανθος στο «Μέγα Θεωρητικό της Μουσικής» του, χρειάζεται περαιτέρω τελειοποίηση. Έτσι 50 χρόνια μετά η Πατριαρχική Επιτροπή προσπάθησε να διαλευκάνει – αποσαφηνίσει μερικά πράγματα λέγοντας όμως και αυτή ότι πολλά έχουν ακόμα να γίνουν.

Ακόμα και ο Σίμων Καράς στο θεωρητικό του (που πλησιάζει το σκοπό ακόμα περισσότερο) αναφέρει επίσης ότι πολλά έχουν ακόμα να γίνουν και ένα από τα κυριότερα είναι τα «Φυσικά».

Και στις τρεις παραπάνω εργασίες υπάρχουν λάθη και κενά με αποτέλεσμα:

1. Να μην υπάρχει ακόμα μία και μόνο μέθοδος που να αφορά τη χρήση των διαφόρων διαστημάτων που χρησιμοποιεί η μουσική μας και να συμφωνούν σε αυτή όλοι.
2. Να αποκλείεται η χρήση κάποιου τεχνικού μέσου, αποδεκτού από όλους, που θα βοηθούσε τον έλεγχο αυτού που ψάλλομε ή τραγουδάμε δηλαδή ενός κατάλληλα διαμορφωμένου οργάνου. Και αυτό είναι το κύριο πρόβλημα της μουσικής μας.

Δεν εννοούμε βέβαια να χρησιμοποιείται μέσα στην εκκλησία κατά την ώρα της λειτουργίας αλλά μόνο στις σχολές βυζαντινής μουσικής. Θα πρέπει κάθε μαθητής παράλληλα και από την αρχή σχεδόν της σπουδής του να μαθαίνει να παίζει στο όργανο αυτό τα μαθήματα και να τα ψάλει συγχρόνως. Φυσικά θα μπορεί να χρησιμοποιηθεί στην παραδοσιακή και την δημοτική μουσική που είναι οργανική.

2. Η ΛΥΣΗ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ

Δυο είναι τα όργανα που μπορούν να χρησιμοποιηθούν για αυτή τη δουλειά: ο ταμπουράς ή ακόμα καλύτερα το τούρκικο Ταμπούρ (εξέλιξη της αρχαίας ελληνικής Πανδούρας) και το Κανονάκι. Αρκεί βέβαια όλοι να συμφωνήσουν στο κούρδισμα έτσι ώστε αυτό να είναι κοινό, αλλά και στο που θα τοποθετηθούν και πόσοι θα είναι οι μπερντέδες και τα μανταλάκια στο Ταμπούρ και το Κανονάκι αντίστοιχα.

Μέχρι εδώ καλά, ίσως σκεφτούμε ότι το παραπάνω δεν είναι και πολύ δύσκολο να συμβεί. Πρέπει όμως το όργανο αυτό να έχει ακόμα τη δυνατότητα της μεταφοράς έτσι ώστε κάθε φωνή ανδρική ή γυναικεία να μπορεί να ψάλλει τα μέλη μεταφερμένα. Μπορούν βέβαια να χρησιμοποιούνται παραπάνω από ένα όργανα με διαφορετικά κουρδίσματα (πχ ταμπουράδες με χορδές ΡΕ ΛΑ ΡΕ, ΛΑ ΜΙ ΛΑ). Το ιδανικό όμως είναι να χρησιμοποιηθεί ένα συγκερασμένο σύστημα έτσι ώστε με το ίδιο χόρδισμα να μπορούμε να παίξουμε κάθε μελωδία από οποιοδήποτε σκαλοπάτι του συγκερασμού.

Πολλοί τώρα θα πουν ότι από παλιά ξέρουμε ότι αυτό είναι ανέφικτο και πάντα κάτι πρέπει να θυσιάσουμε (αυτός είναι και ο λόγος που στην παραδοσιακή μουσική μας χρησιμοποιούνται τυφλά όργανα όπως η λύρα, το βιολί και το ούτι). Αν όμως μπορούσε να γίνει φανταστείτε τι δυνατότητες θα αποκτούσαμε. Η έντεχνη εξωτερική μουσική πχ θα μπορούσε αν ήθελε να διανύσει τον ίδιο δυτικό δρόμο προς την πολυφωνία και να ανακαλύψει μια αρμονία πολλές φορές πιο πλούσια. Άλλα ακόμα και η Δυτική μουσική θα μπορούσε με ένα τέτοιο σύστημα να διορθώσει την κακοφωνία της... Η δε εκκλησιαστική μουσική θα έπαινε να επηρεάζεται από τα ακούσματα του ευρωπαϊκού δωδεκάφθογγου συγκερασμού που κατακλύζει το αισθητήριο μας από τα τέλη του 19^{ου} αιώνα ακόμα.

Η παρούσα εργασία θέλει να δείξει ότι αυτό το σύστημα υπάρχει και είναι «κάτω από τα πόδια μας» από την εποχή του Πυθαγόρα και του Πλάτωνα. Μόνο που οι αρχαίοι δεν μίλησαν για όλα. Ίσως διότι θεωρούσαν ότι τα ευκόλως εννοούμενα παραλείπονται.

3. ΓΝΩΣΤΕΣ ΔΙΑΙΡΕΣΕΙΣ ΤΗΣ ΟΚΤΑΒΑΣ

Τώρα κάποιοι θα πουν ότι έχουμε ήδη 3 συγκερασμένα συστήματα τα : οκτάβα / 36 (Πατριαρχική επιτροπή), οκτάβα / 68 (Χρύσανθος) και οκτάβα / 72 (Αριστόξενος- Πατριαρχική επιτροπή). Τα δυο τελευταία που έχουν βέβαια πολλά προβλήματα βασίζονται στο γεγονός ότι ο τόνος πρέπει να διαιρείται με το 2 (παράγει ημιτόνιο), το 3 (παράγει 1/3 του τόνου) και το 4 (παράγει 1/4 του τόνου) και ο μικρότερος αριθμός που τηρεί αυτή την απαίτηση είναι το 12. Έτσι με τον τόνο 12 κομμάτια υπολογίζεται η οκτάβα να αποτελείται από 68 ή 72 κομμάτια.

Πως προκύπτουν τα 68 μόρια.:

Ο Χρύσανθος είδε ότι οι αριθμοί που αντιπροσωπεύουν τους τρεις τόνους μείζων, ελλάσων και ελάχιστο με δεδομένο ότι οι τρεις μαζί συνιστούν μια Τετάρτη καθαρή (συλλαβή ή επιτρίτη) και ότι ο μείζων τόνος όπως είδαμε είναι 12 μόρια είναι οι 12, 9 και 7. Ήθελε δηλαδή να πει ότι η διαφορά του μείζονα από τον ελάσσονα τόνο είναι κατά τι μεγαλύτερη από ότι η διαφορά του ελάσσονα από τον ελάχιστο τόνο. Κι αυτό μάλλον το διαπίστωσε από τις θέσεις των δεσμών (μπερντέδων) που όταν τοποθετούσαν στον ταμπουρά με το αυτί πρόκυπτε άκουσμα ίδιου ήθους με αυτό που από παράδοση ήξεραν από τους δασκάλους τους.

Πως προκύπτουν τα 72 μόρια :

Ο Αριστόξενος με βάση κάποιο αμφισβητούμενο πείραμα αφήνει το αυτί να αποφασίσει και αποφασίζει και ο ίδιος ότι η συλλαβή (Τετάρτη καθαρή) αποτελείται από δυο τόνους και ένα ημιτόνιο το οποίο είναι ακριβώς το μισό του τόνου. Το χρωματικό και το εναρμόνιο γένος κάνουν χρήση του 1/3 του τόνου και του 1/4 του τόνου. Ο μικρότερος αριθμός που διαιρείται και με το 3 και με το 4 είναι το 12. Έτσι δεχόμαστε τον τόνο να αποτελείται από δώδεκα μόρια. Δυο συλλαβές και ένας προσλαμβανόμενος ή διαζευκτικός τόνος συνιστούν το διαπασών (οκτάβα). Άρα $12+12+6+12+12+6+12=72$ ή $12+12+6+12+12+12+6=72$

Πως προκύπτουν τα 36 μόρια:

Η πατριαρχική επιτροπή προτείνει τη διαίρεση της οκτάβας δια 36 διότι η διαίρεση δια 72 μόνο θεωρητικά και όχι πρακτικά μπορεί να χρησιμοποιηθεί αφού οι δεσμοί θα ήταν πολύ κοντά ακόμα και στο Ταμπούρ που έχει μήκος χορδής από 105cm έως το πολύ 130cm.

Πρότεινε, επίσης και κατασκεύασε πληκτροφόρο πνευστό όργανο (όπως το εκκλησιαστικό που είναι εξέλιξη της αρχαίας ελληνικής Ύδραυλης) που χρησιμοποιούσε αυτή τη διαίρεση της οκτάβας σε 36 κομμάτια. Αυτό το όργανο θα έλυνε το πρόβλημα μας όμως αυτή η διαίρεση είναι ακατάλληλη για τα περισσότερα εκκλησιαστικά μέλη.

Ίσως προστατεύει την εκκλησιαστική μας μουσική από ακούσματα με χαρακτήρα φιλήδονο που προκύπτουν από την χρήση κάποιων διαστημάτων (συχνών στην τούρκικη μουσική) όπως το ημιτόνιο 16/15, ο ελάσσων τόνος 10/9, η μεγάλη τρίτη 5/4, η μικρή τρίτη 6/5 και όσα άλλα διαστήματα παράγονται από τα παραπάνω (μικρές και μεγάλες έκτες και εβδόμες). Τα παραπάνω όμως διαστήματα πιθανό χρησιμοποιούνται στην παραδοσιακή και δημοτική μουσική μας (κατά τον Σίμωνα Καρρά απαντώνται στο χρωματικό και εναρμόνιο – καθαυτόγενος).

Αναλυτικότερα και όσον αφορά τον Χρύσανθο θα επανέλθουμε αργότερα αλλά προς το παρόν ας πάρουμε τα πράγματα από την αρχή.

4. ΠΛΑΤΩΝ ΚΑΙ ΠΥΘΑΓΟΡΕΙΑ ΚΛΙΜΑΚΑ

Δεν υπάρχουν αμφιβολίες για την μουσική παιδεία του Πλάτωνα. Στον Φαίδωνα ακούμε τον Σωκράτη να λέει ότι η φιλοσοφία είναι η ανώτερη μορφή μουσικής. Στην Πολιτεία υπάρχει η άποψη ότι η διαπαιδαγώγηση των νέων της ανώτερης τάξης πρέπει να γίνεται με τη μουσική. Αυτή η τάξη θα έπρεπε να συντηρείται από όλες τις άλλες για να είναι τα μέλη της άρχοντες και φύλακες της Πόλης – Κράτους. Οι νέοι μέσω της μουσικής θα οδηγούνταν στη φιλοσοφία ώστε οι αποφάσεις τους και σαν άρχοντες και σα φύλακες να ήταν οι σωστότερες και δικαιούτερες.

Στον Τίμαιο, που είναι ένα από τα πιο ώριμα και σημαντικά του έργα, ο Πλάτωνας αποκαλύπτει τις Πυθαγόρειες θεωρίες περί μουσικής λέγοντας ότι ο Θεός δημιούργησε την ψυχή χρησιμοποιώντας τις αναλογίες της πυθαγόρειας μουσικής κλίμακας.

Σε κάποια φάση λοιπόν της δημιουργίας ο Θεός αφού πήρε διπλάσιες και τριπλάσιες ποσότητες από την αναλλοίωτη αθάνατη ουσία και την ουσία που γεννιέται και πεθαίνει διαρκώς, δημιούργησε μια αναλογία κάπως έτσι απλά σαν να μιλούσαμε για μια χορδή:

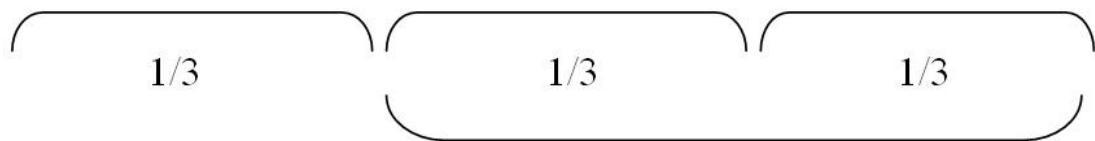
1 Τίσο (ολόκληρη χορδή)

1. Πήρε το μισό της χορδής που δίνει διπλάσιο κραδασμό(συχνότητα).

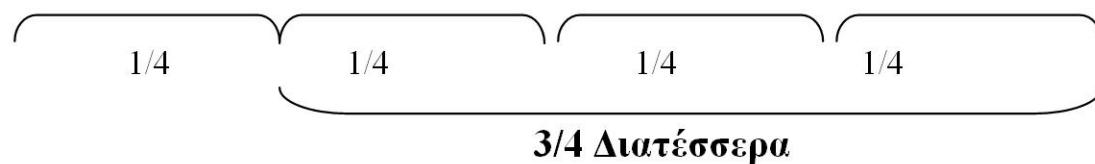
1/2

1/2 Διαπασών

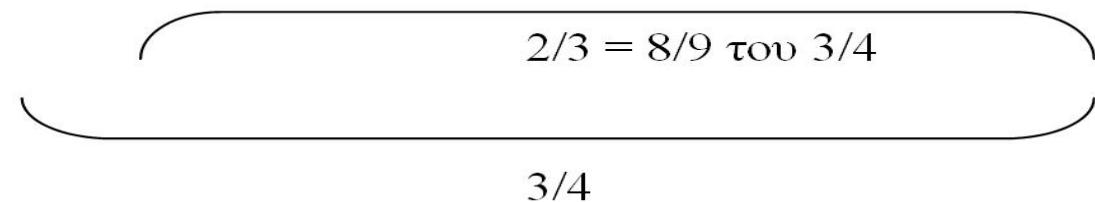
2. Πήρε τα $2/3$ που δίνουν κραδασμό $3/2$ του πρώτου κραδασμού (5κ)



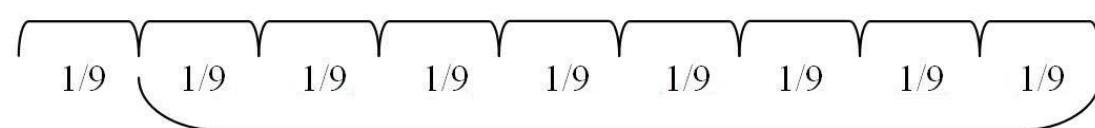
3. Πήρε τα $3/4$ που δίνουν κραδασμό $4/3$ του πρώτου κραδασμού
(συλλαβή ή 4κ)



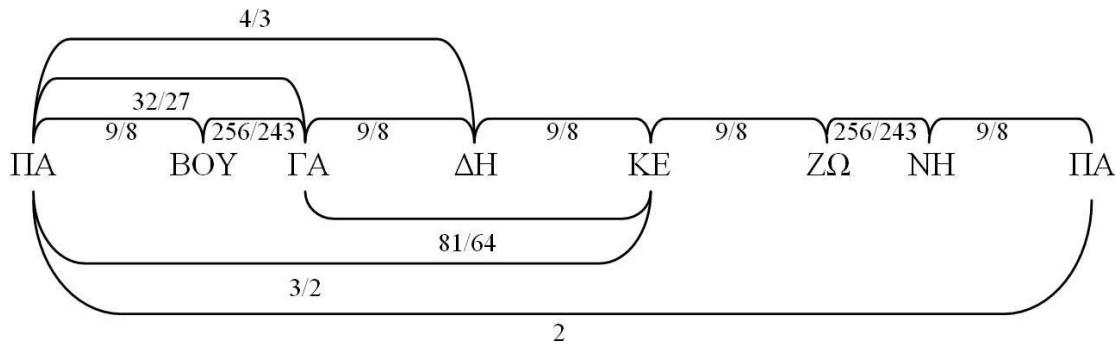
4. Η διαφορά που προκύπτει $2/3 : 3/4 = 8/9$ είναι ο μείζων τόνος



Δηλαδή σε ολόκληρη τη χορδή



4. Τέλος τοποθετώντας τόνους στα κενά προκύπτουν οι αναλογίες 27/32 και 243/256. Η πρώτη που προκύπτει από τη διαφορά ανάμεσα στα 3/4 (4κ) και τα 8/9 (μείζων τόνο) ονομάστηκε **τριημίτονο**. Η δεύτερη ονομάστηκε **λείμμα** και είναι η διαφορά ανάμεσα στα 3/4 και σε δυο μείζων τόνους.



Καταλαβαίνουμε λοιπόν ότι ο Πλάτωνας παρουσιάζει τα διαστήματα που αποτελούν τη μουσική κλίμακα του Πυθαγόρα και αυτά είναι:

- 1 το **ίσο** (1κ) δηλαδή ΠΑ-ΠΑ
- 2 το **διαπασών** (οκτάβα ή 8κ) δηλαδή ΠΑ-ΠΑ'
- 3/2 το **διαπέντε** (5κ) δηλαδή ΠΑ-ΚΕ
- 4/3 το **διατέσσερα** (4κ) δηλαδή ΠΑ-ΔΗ ($2 : 3/2 = 4/3$)
- 81/64 το **δίτονο** (3Μ) δηλαδή ΓΑ-ΚΕ ($9/8 * 9/8 = 81/64$)
- 32/27 το **τριημίτονο** (3μ) δηλαδή ΠΑ-ΓΑ ($4/3 : 9/8 = 32/27$)
- 9/8 ο **μείζων τόνος** (2Μ) δηλαδή ΔΗ-ΚΕ ($3/2 : 4/3 = 9/8$)
- 256/243 το **λείμμα** (2μ) δηλαδή ΒΟΥ-ΓΑ ($4/3 : 81/64 = 256/243$)

Να επισημάνουμε ότι κατά την πρόσθεση των διαστημάτων κάνουμε πολλαπλασιασμό των λόγων και κατά την αφαίρεση διαίρεση. Ακόμα ότι οι λόγοι τη χορδής ανεστραμμένοι εκφράζουν λόγους συχνοτήτων. Για παράδειγμα μπορούμε να πούμε ότι όταν πάλλονται τα 2/3 της χορδής - οπότε παράγεται ένα διάστημα πέμπτης καθαρής

(διαπέντε) με την ανοικτή χορδή - η συχνότητα (κραδασμός) του νέου φθόγγου είναι $3/2$ φορές μεγαλύτερη της συχνότητας της ανοικτής χορδής.

Οι αρχαίοι δεν πολυσυμπαθούσαν τους μαθηματικούς υπολογισμούς και χρησιμοποιούσαν λέξεις για να συμβολίζουν τους αριθμούς ($\alpha=1, \beta=2, \dots, \omega=800$). Έτσι βλέπουμε τον Αριστόξενο που ήταν μαθητής του Αριστοτέλη (ο οποίος ήταν βέβαια μαθητής του Πλάτωνα) να μην δέχεται τη χρήση αριθμητικών λόγων στο υπολογισμό των μουσικών διαστημάτων και να βασίζεται στην αίσθηση της ακοής. Δέχεται, βέβαια, τα διαστήματα της οκτάβας ($1/2$) της πέμπτης ($3/2$) της τετάρτης ($3/4$) και του τόνου ($9/8$) ως διαφορά των διαστημάτων της οκτάβας και της πέμπτης ($2 : 3/2 = 4/3$).

5. Η ΠΡΟΣΦΟΡΑ ΤΟΥ ΑΡΙΣΤΟΞΕΝΟΥ

Ο Αριστόξενος ξεκινά τη μελέτη των μικροδιαστημάτων από το εναρμόνιο γένος. Το εναρμόνιο τετράχορδο αποτελείται από ένα δίτονο και 2 ίσα μικροδιαστήματα που μαζί δίνουν ένα λείμμα. Αυτό το διάστημα που είναι το μισό του λείμματος ονομάζεται «ελάχιστη δίεση».

	Λείμμα/2	Λείμμα/2	Δίτονο
	I	I	I
Υπάτη (MI)	I Παρυπάτη (ΦΑ)	I Λιχανός (ΣΟΛ)	I Μέση (ΛΑ)
(BOY)	I (ΓΑ)	I (ΔΗ)	I (ΚΕ)

Το χρωματικό και το εναρμόνιο γένος σε αντίθεση με το διατονικό κάνουν χρήση του λεγόμενου «πυκνού» το οποίο αποτελείται από δυο διαστήματα που στο σύνολο τους είναι μικρότερα από μισή συλλαβή (δηλαδή διαστήματος τετάρτης καθαρής) και είναι ίσα μεταξύ τους ή άνισα.

Όπως είδαμε στο εναρμόνιο γένος το πυκνό αποτελείται από 2 ελάχιστες διέσεις και ισούται με ένα λείμμα. Στο χρωματικό γένος τώρα το πυκνό αποτελείται από δυο όμοια ή ανόμοια διαστήματα και μπορεί να είναι το 2/3 του τόνου ή ένας τόνος ή τα 4/3 του τόνου.

Έτσι όλα είναι απλά. Ο Αριστόξενος αποφεύγει πολύπλοκους αριθμητικούς λόγους που προκύπτουν από παραπέρα διαίρεση της πυθαγόρειας κλίμακας. Όλα αυτά φάνηκαν λογικά στους μουσικούς και τα αποδέχτηκαν.

Όταν τώρα ήθελαν να υπολογίσουν ένα διάστημα (πχ για να δέσουν ένα δεσμό σε ένα έγχορδο με μπράτσο) χρησιμοποιούσαν λόγους που ο αριθμητής τους ήταν κατά ένα μεγαλύτερος από τον παρανομαστή. Αυτά τα διαστήματα αναφέρονται ως «πτολεμαϊκά» μια και τα γνωρίζουμε από τον Πτολεμαίο.

Έτσι έχουμε:

1 2/1 3/2 4/3 5/4 6/5 7/6 8/7 9/8 10/9 κτλ

Το 1/3 του τόνου αντιστοιχεί στο 25/24 και τα 2/3 του τόνου στο 27/25 ($9/8 : 25/24 = 27/25$)

Για να δέσουν λοιπόν ένα δεσμό σε απόσταση τόνου διαιρούσαν τη χορδή σε 9 μέρη και έβαζαν το δεσμό στο τέλος του πρώτου μέρους. Αυτά τα διαστήματα εκτός του τόνου της τετάρτης και της πέμπτης απλώς προσεγγίζουν τα πραγματικά διαστήματα που εννοεί ο Αριστόξενος και ο Πυθαγόρας αλλά είναι εύκολα στη χρήση τους χωρίς να χρειάζονται πολύπλοκοι υπολογισμοί. Με τη χρήση όμως των λογαρίθμων και των υπολογιστών, σήμερα, δεν έχουμε λόγο να τα προτιμάμε παρά μόνο για πρακτικούς λόγους. Για παράδειγμα το 1/3 του τόνου είναι ακριβώς η τρίτη ρίζα του 9/8 που ισούται με 1,04004 ενώ τα $25/24 = 1,04167$. Τα δυο αυτά διαστήματα διαφέρουν κατά 2,5 cents (η οκτάβα αποτελείται από 1200 cents).

Αλλά και η εργασία του Αριστόξενου δεν είναι απόλυτα ακριβής διότι και το ανθρώπινο αυτί έχει σχετική ακρίβεια, δηλαδή, διαφέρει από άνθρωπο σε άνθρωπο και μειώνεται ακόμα με την ηλικία.

Σύγχρονες έρευνες δείχνουν ότι η ικανότητα του αυτιού να διακρίνει μικρές διαφορές συχνότητας εξαρτάται από την ηλικία και είναι κατά μέσο όρο 3,5 cents στις μικρές ηλικίες και μέχρι 8 cents στις μεγάλες. Έτσι συνήθως αναφέρονται τα 5 cents ως ο μέσος όρος για τον άνθρωπο, και τα 2 cents ως ανθρώπινο όριο.

Τίποτα δεν μπορούμε να θεωρήσουμε ως λάθος αν λάβουμε υπόψη ότι η ακρίβεια του αυτιού να διακρίνει μικροδιαφορές στα διαστήματα είναι σχετική.

Το 1/4 του τόνου αναφέρεται ως «**εναρμόνια δίεση**». Ο Αριστόξενος θεωρεί ότι είναι το μικρότερο διάστημα που μπορεί να τραγουδηθεί και να συμμετέχει σε μια μελωδία. Το εναρμόνιο βέβαια γένος όπου γίνεται χρήση της ελάχιστης δίεσης υπήρχε πριν αυτόν. Το ερώτημα λοιπόν είναι πιο είναι η ελάχιστη δίεση' μήπως το 1/4 του τόνου ή το 1/2 του λείμματος.

6. ΥΠΟΛΟΓΙΖΟΝΤΑΣ ΤΟ ΛΑΘΟΣ ΣΤΟ ΠΕΙΡΑΜΑ ΤΟΥ ΑΡΙΣΤΟΞΕΝΟΥ

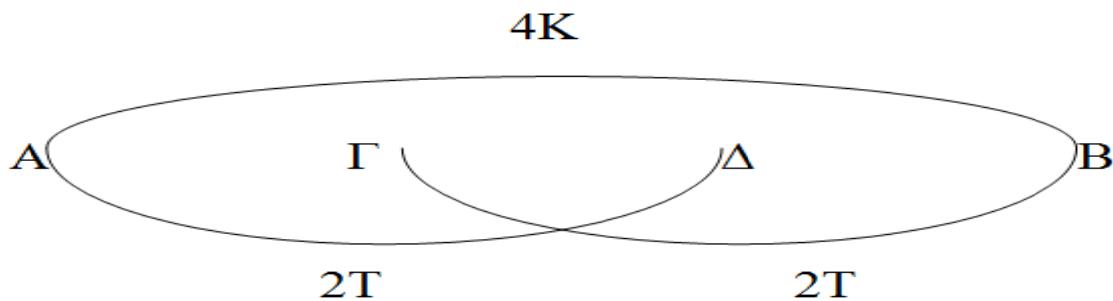
Ο Αριστόξενος θεωρεί ότι το αυτί «αποφασίζει» ότι το λείμμα (που το λέει ημίτονο) είναι το 1/2 του τόνου. Ή, με άλλα λόγια, ότι η συλλαβή (4κ) αποτελείται από 2,5 τόνους ακριβώς. Αυτό έρχεται σε αντίθεση με τη θεωρεία του Πυθαγόρα όπου η συλλαβή αποτελείται από δυο τόνους και ένα λείμμα (το οποίο είναι μικρότερο από το μισό του τόνου αφού $256/243 * 256/243 < 9/8$).

Για την απόδειξη των λεγόμενων του ο Αριστόξενος προτείνει ένα ακουστικό πείραμα που περιγράφεται κάπως έτσι:

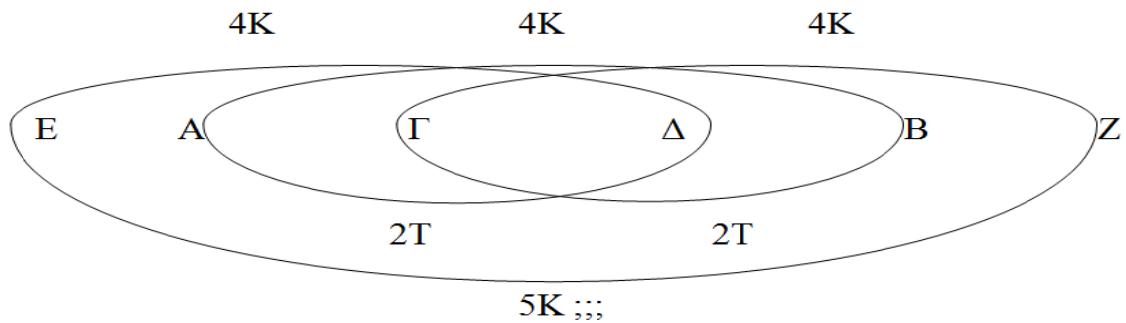
Κουρδίζουμε -πχ σε ένα έγχορδο όργανο- 2 χορδές διάστημα τετάρτης καθαρής (σημεία Α και Β)



Κουρδίζουμε άλλες δυο χορδές την μια (σημείο Δ) ένα δίτονο οξύτερα της χαμηλής (σημείου Α) και την άλλη (σημείο Γ) ένα δίτονο βαρύτερα της υψηλής (σημείου Β)



Τέλος κουρδίζουμε άλλες δυο χορδές την μια (σημείο Ζ) μια τετάρτη καθαρή οξύτερα της χορδής - σημείου Γ και την άλλη (σημείο Ε) μια τετάρτη καθαρή βαρύτερα της χορδής - σημείου Δ.



Αν η Πέμπτη μεταξύ E και Z είναι καθαρή τότε τα διαστήματα EA, AG, ΔB και BZ θα είναι ίσα μεταξύ τους και θα ισούνται με μισό τόνο ακριβώς. Ακόμα η συλλαβή (4K) θα αποτελείται από **δυόμιση τόνους**. (ΑΔ +ΔB ή AG+GB). Μαθηματικά αυτό δεν ισχύει διότι:

$$\begin{aligned} Z &= (4/3 : 81/64) * 4/3 = 1024/729 \text{ και} \\ E &= 81/64 : 4/3 = 243/256 \text{ οπότε} \\ Z : E &= 1024/729 : 243/256 = 1,4798 \end{aligned}$$

που είναι μικρότερο του 3/2 δηλαδή του 1,5. Η διαφορά σε cents είναι 22,8 λιγότερα. Αυτό όλοι το ακούνε. Βέβαια ο Αριστόξενος έχει προλάβει να μας πει ότι όσο πιο μεγάλη είναι μια συμφωνία (και η Πέμπτη καθαρή είναι η μεγαλύτερη μετά από την οκτάβα) τόσο και τα όρια της μεγαλύτερα. Αυτό όμως δεν σώζει την κατάσταση.

Να μια άλλη προσέγγιση :

Η ανθρώπινη φωνή αν τραγουδήσει δίτονο χαλαρά και χωρίς σκέψη πιθανό να τραγουδήσει το διάστημα 5/4 που προκύπτει πιο φυσικά από το 81/64 και βρίσκεται 22 cents χαμηλότερα από αυτό. Πιθανό λοιπόν αυτό να εννοούσε δίτονο ο Αριστόξενος αλλά και έτσι αν κουρδίσουμε

$$\begin{aligned} Z &= 4/3 : 5/4 * 4/3 = 64/45 \text{ και} \\ E &= 5/4 : 4/3 = 15/16 \text{ οπότε} \\ Z : E &= 64/45 : 15/16 = 1024/675 = 1,5170 \end{aligned}$$

που είναι μεγαλύτερο του 3/2 δηλαδή του 1,5.

Σίγουρα ο Αριστόξενος δέχεται τα διαστήματα 3/2 , 4/3 και 9/8 όπως φαίνεται στο βιβλίο του «Αρμονικά στοιχεία». Για να ισχύει όμως ο συλλογισμός του πρέπει ο τόνος να είναι μικρότερος του 9/8 κατά 4 περίπου cents. Εδώ βασίζεται ο ευρωπαϊκός συγκερασμός των 12 ημιτονίων και εδώ ακριβώς αποτυγχάνει επίσης και η διαρεση του διαπασών σε 72 (6χ12) ή 36 (3χ12) μέρη.

Ότι η Πέμπτη που προκύπτει από το πείραμα δεν είναι καθαρή ακούγεται λίγο, βέβαια, μια και σαν συμφωνία η Πέμπτη έχει μεγαλύτερη ανοχή, αν όμως κουρδίσουμε τις τετάρτες και τους τόνους και κάνουμε τον έλεγχο για την Πέμπτη με τη χρήση των αρμονικών (τρόπος κουρδίσματος στα έγχορδα για καλύτερη ακρίβεια στις πέμπτες)

το λάθος του Αριστόξενου θα φανεί καθαρά. Ακόμα κάθε οργανοπαίκτης εγχόρδου με μπράτσο γνωρίζει ότι όταν δυο διπλανές χορδές βρίσκονται σε διάστημα Πέμπτης με ακρίβεια κουρδίσματος, μόλις δονήσουμε την μια χορδή αρχίζει και η άλλη να δονείται λόγω συντονισμού. Έτσι μπορούμε να ελέγξουμε και με οπτική ακρίβεια το πείραμα του Αριστόξενου. Η συλλαβή δεν αποτελείται από δυο και μισό τόνους αλλά από δυο τόνους και ένα λείμμα όπως πολύ σωστά δίδαξε ο Πυθαγόρας (και το γνωρίζουμε και από τον Πλάτωνα όπως είδαμε) και αυτό το λείμμα είναι μικρότερο από μισό τόνο αφού $256/243 * 256/243 = 1,1099$ ενώ $9/8 = 1,125$.

7. ΤΟ ΜΥΣΤΗΡΙΩΔΕΣ ΕΝΑΡΜΟΝΙΟ ΠΥΚΝΟ

Έτσι λοιπόν πρέπει να δεχτούμε ότι στο εναρμόνιο είδος το πυκνό αποτελείται από ένα λείμμα και όχι από μισό τόνο. Και αυτό το πυκνό όπως έλεγαν οι αρχαίοι οι πολλοί δεν μπορούν να το αποδώσουν' να τραγουδήσουν δηλαδή δυο συνεχόμενους φθόγγους που στο σύνολο τους να αποτελούν λείμμα.

Αν τώρα θεωρήσουμε ότι το δίτονο αποτελείται από δυο διαφορετικούς τόνους τον 9/8 και τον 10/9 έτσι ώστε να ισούται με 5/4 (4/3 : 9/8 : 10/9 = 5/4) η διαφορά του από την τετάρτη είναι 4/3 : 5/4 = 16/15 διάστημα που μοιάζει πολύ με αυτό που προκύπτει αν αφαιρέσουμε από ένα τόνο ένα λείμμα δηλαδή :

$$9/8 : 256/243 = \mathbf{2187/2048} \text{ ή } 3^2/2^3 : 2^8/3^5 = \mathbf{3^7/2^{11}}$$

Αυτό το διάστημα λέγεται «**αποτομή**» και είναι μεγαλύτερο και από το λείμμα και από τον μισό τόνο.

Ποιο τώρα από τα παραπάνω πυκνά φαίνεται ότι είναι αδύνατο να εκτελεστεί από τους πολλούς; Το λείμμα, η αποτομή ή ο μισός τόνος; Χωρίς πολύ σκέψη επιλέγουμε το λείμμα.

Μαθαίνουμε λοιπόν από τον Αριστόξενο ότι το εναρμόνιο γένος ήταν αδύνατο να τραγουδηθεί από τους πολλούς. Θέτει έτσι το όριο της απόδοσης για την ανθρώπινη φωνή γύρω στα 50 cents (44cents-66cents). Σήμερα ερευνητές ισχυρίζονται ότι με εξάσκηση ο άνθρωπος μπορεί να αποδώσει γύρω στα 20 cents και αυτό μπορεί να οριστεί ως το βήμα του γκλισάντο μιας καλογυμνασμένης φωνής. Δεν υπάρχουν αρκετές έρευνες πάνω σε αυτό το θέμα (τουλάχιστον δεν βρήκα εγώ) αν και υπάρχουν όργανα ελέγχου με ακρίβεια καλύτερη του 0,1cent.

8. ΤΑ ΔΙΑΦΟΡΑ ΧΡΩΜΑΤΙΚΑ ΠΥΚΝΑ

Στο χρωματικό γένος τώρα το πυκνό ισούται με $2/3$ του τόνου ή 1 τόνο ή $4/3$ του τόνου. Εδώ ο Αριστόξενος μας μπερδεύει μια και τα $4/3$ του τόνου ξεπερνούν την μισή συλλαβή. Το σωστό θα ήταν να αναφέρει $5/4$ του τόνου. Αλλά ας μην μείνουμε εδώ. Στην πρώτη περίπτωση τα διαστήματα που αποτελούν το πυκνό μπορεί να είναι είτε δυο $1/3$ του τόνου είτε ένα λείμμα και μια ελάχιστη δίεση. Στην δεύτερη περίπτωση θα αποτελείται από μια αποτομή και ένα λείμμα είτε από $2/3$ του τόνου και $1/3$ του τόνου. Στην τελευταία περίπτωση θα αποτελείται από 2 όμοια $2/3$ του τόνου. Θα επανέλθουμε όμως σε αυτό το ζήτημα αργότερα.

9. ΤΑ ΛΑΘΗ ΤΟΥ ΧΡΥΣΑΝΘΟΥ ΚΑΙ ΤΗΣ ΕΠΙΤΡΟΠΗΣ ΚΑΙ Η ΘΕΣΗ ΤΟΥ ΣΙΜΩΝΑ ΚΑΡΑ

Είχαμε πει λοιπόν ότι ο Χρύσανθος δίνει τη σχέση των τόνων στο διατονικό γένος ως 12, 9, 7. Έπειτα μας λέει ότι το 12 που εννοεί μείζων τόνο είναι το διάστημα 9/8 (σωστά), το 9 που εννοεί ελάσσονα τόνο είναι το διάστημα 12/11 και ο ελάχιστος ότι απομένει για τη συμπλήρωση του δια τέσσερα δηλαδή $4/3 : 9/8 : 12/11 = 88/81$. Αυτά όμως τα δυο διαστήματα 12/11 και 88/81 είναι σχεδόν ίδια (αφού απέχουν μόλις 7 cents) και σε καμιά περίπτωση δεν έχουν σχέση 9 προς 7. Αν θεωρήσουμε σωστούς τους λόγους και δεχτούμε ότι τα 9/8 είναι 12 μόρια τότε τα 12/11 είναι 8,86 μόρια και τα 88/81 είναι 8,47 μόρια. Η δε κλίμακα διαπασών θα αποτελείται από 71 μόρια (70,62) και όχι 68 που δέχεται ο Χρύσανθος.

Η πατριαρχική Επιτροπή αργότερα κατάλαβε αυτό το λάθος όχι όμως απόλυτα γιατί και αυτή κάνει λάθος όταν υπολογίζει τη σχέση των τριών παραπάνω τόνων 9/8, 12/11, 88/81 ως 12, 8, 7.

Σήμερα ένα κομπιουτεράκι με δυνάμεις και ρίζες δείχνει αυτά τα λάθη στη στιγμή. Η σχέση 12, 9, 7 εκφράζει μάλλον τη σχέση των διαστημάτων 9/8, 11/10, 320/297. Δεν εννοούσε όμως αυτά ο Χρύσανθος.

Ο δε Σ. Καρράς ασκεί κριτική στην Επιτροπή και δε δέχεται τα λάθη του Χρύσανθου κι όλα αυτά στην εισαγωγή του θεωρητικού του, όμως στο κύριο μέρος δεν αναφέρει τίποτα για το θέμα. Επίσης αποφεύγει να μιλήσει με αναλογίες και όλα τα διαστήματα τα αναφέρει με μόρια. Δεν λέει τελικά ποιο διάστημα είναι ο ελάσσων τόνος και ποιο ο ελάχιστος. Μόνο εκεί που αναφέρεται στα όργανα έχει μια περιγραφή των αναλογιών στις αποστάσεις των δεσμών ενός λαούτου – λείπουν όμως κάποια διαστήματα όπως αυτό που εκφράζεται από τα 8 μόρια που ενώ αλλού τα δέχεται σαν ελάχιστο τόνο, άλλες φορές αναφέρει ότι ο ελάχιστος τόνος αποτελείται από 7,5 μόρια.

Έχει προσθέσει ακόμα στο διάγραμμα κάποιους δεσμούς που δεν υπάρχουν στο όργανο. Ακόμα κάνει διάφορα λάθη πχ υπολογίζει το διάστημα 12/11 ότι αποδίδεται με 9,5 μόρια (με διαπασών 72 μόρια) ενώ είναι 9 μόρια ή το διάστημα 10/9 με 11,5 μόρια ενώ είναι 11. Τα διαστήματα είναι κατά Πτολεμαίο (ο αριθμητής κατά μια μονάδα

μεγαλύτερος του παρανομαστή) για να βοηθιέται αυτός που θέλει εύκολα να υπολογίσει τη θέση των δεσμών.

Τέλος άλλοτε δέχεται το διαπασών να αποτελείται από 72 μόρια και άλλοτε από 71. Ευτυχώς τουλάχιστον παραδέχεται την αδυναμία του να καλύψει το θέμα της ακριβής απόδοσης των διαστημάτων καθώς λέει ότι πολλά πρέπει να διαλευκανθούν ακόμα στην μουσική μας και πρώτα από όλα τα «φυσικά» και η «κατά κανόνος κατατομή».

10. ΠΑΡΑΠΕΡΑ ΛΑΘΗ ΑΝΟΧΗΣ ΕΞΑΙΤΙΑΣ ΤΩΝ 12 ΜΟΡΙΩΝ ΤΟΥ ΜΕΙΖΟΝΑ ΤΟΝΟΥ

Και οι τρεις συγκερασμοί που είδαμε (των 36, 68 και 72 μορίων) περιγράφουν με σχετική μόνο ακρίβεια τη σχέση των βασικών διαστημάτων. Έτσι προκύπτουν διάφορα λάθη. Το κυριότερο από αυτά είναι ότι αν θεωρήσουμε τον τόνο 12 μόρια η οκτάβα (διαπασών) δεν θα αποτελείται ούτε από 68 ούτε από 72 μόρια (και με τόνο 6 μόρια από 36). Για να αποδειχθεί το παραπάνω υποθέτουμε ότι η μονάδα του συγκερασμένου συστήματος (δηλαδή το ένα μόριο) αυξάνει τον κραδασμό έστω κατά «ω» φορές. Αυτή η μονάδα υψωμένη σε ένα ακέραιο αριθμό θα πρέπει να δίνει τα διάφορα διαστήματα με ικανοποιητική ακρίβεια.

Έτσι το διάστημα του μείζων τόνου μπορεί να εκφραστεί ως « ω^v » και το διάστημα της οκτάβας ως « ω^u ». Έχουμε λοιπόν:

$$\omega^v = 9/8 \text{ για τον τόνο και}$$

$$\omega^u = 2 \text{ για το διαπασών.}$$

Για να βρούμε τη σχέση ν/μ χρησιμοποιούμε λογαρίθμους.

$$\log \omega^v = \log (9/8) \text{ και}$$

$$\log \omega^u = \log 2$$

Βάση των ιδιοτήτων των λογαρίθμων ισχύει:

$$\log \omega^v = \log (9/8) \text{ και}$$

$$\log \omega^u = \log 2$$

Διαιρώντας

$$\frac{\log \omega^v}{\log \omega^u} = \frac{\log (9/8)}{\log 2} = 0,17 \Leftrightarrow \mu = v / 0,17$$

Βάση αυτού για $v = 12$ (αν δηλαδή ο τόνος έχει 12 μόρια) έχουμε $\mu = 70,62$ (η οκτάβα δηλαδή έχει 70,62 μόρια) και όχι 71 όπως αναφέρεται οπωσδήποτε πολύ μακριά από το 72. Αν θεωρήσουμε την οκτάβα 72 μόρια τότε ο τόνος 9/8 προκύπτει 12,23 μόρια.

Δεν είναι δύσκολό να καταλάβουμε ότι ο μ και ο ν πρέπει να είναι ακέραιοι αριθμοί ή τέλος πάντων αν ο ένας μόνο είναι δυνατό εξ ορισμού να είναι ακέραιος, ο άλλος να βρίσκεται πολύ κοντά σε κάποιο ακέραιο που η διαφορά να μη γίνεται αντιληπτή.

Για τη σχέση τώρα τόνου και λείμματος θα μπορούσαμε να πούμε :

Έστω το λείμμα δίνεται ως « ω^ξ » θα πρέπει : $\omega^\xi = 256/243$ και κάνοντας υπολογισμούς όπως πριν θα καταλήγαμε ότι:

$$v/\xi = \lambda \operatorname{og} (9/8) / \lambda \operatorname{og} (256/243) = 2,26 \Leftrightarrow \xi = v / 2,26$$

$$\text{για } v = 12 \text{ έχουμε } \xi = 12 / 2,26 = 5,3$$

Άρα για τόνο 12 μόρια το λείμμα υπολογίζεται 5,3 μόρια και όχι 6 (διαφορά 12cents).

Τέλος για τη σχέση τόνου και διαπέντε (5K) έχουμε:

Έστω το διαπέντε δίνεται ως « ω^χ » θα πρέπει : $\omega^\chi = 3/2$ και κάνοντας υπολογισμούς όπως πριν θα καταλήγαμε ότι:

$$v/\chi = \lambda \operatorname{og} (9/8) / \lambda \operatorname{og} (3/2) = 0,2905 \Leftrightarrow \chi = v / 0,2905$$

$$\text{για } v = 12 \text{ έχουμε } \xi = 12 / 0,2905 = 41,3$$

Άρα για τόνο 12 μόρια το διαπέντε υπολογίζεται 41,3 μόρια και όχι 42 (διαφορά 12cents).

11. ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΤΗΝ ΚΑΤΑΤΟΜΗ ΤΟΥ ΚΑΝΟΝΑ

Ας συνεχίσουμε τώρα στην κατατομή του κανόνα όπως προκύπτει από τον Πυθαγόρα. Δεχόμαστε μόνο τους 3 πρώτους αρμονικούς δηλαδή το ίσο, το διαπασών και το διαπέντε και από αυτούς υπολογίζουμε όλα τα άλλα διαστήματα. Μέχρι στιγμής έχουμε δει τα εξής διαστήματα:

Τιο	1	=	1	=	1
Διαπασών	2	=	2	=	2
Διαπέντε	3/2	=	3/2	=	1,5
Διατέσσερα	$2^2/3$	=	4/3	=	1,3333
Τριημίτονο	$2^5/3^3$	=	32/27	=	1,1852
Μείζων Τόνος	$3^2/2^3$	=	9/8	=	1,125
Λείμμα	$2^8/3^5$	=	256/243	=	1,0535

Να πούμε τώρα ότι όλες οι δυνάμεις του 2 δείχνουν το φθόγγο του ίσου έστω NH , ενώ κάθε 2 αριθμούς που μεγαλώνει η δύναμη του 3 σημαίνει ανέβασμα τόνου και κάθε 1 αριθμό ανέβασμα διαπέντε (5κ). Δηλαδή το 3 δείχνει τον ΔH , το 3^2 τον ΠΑ, το 3^3 τον KE, το 3^5 τον $Z\Omega$. Έτσι έχουμε:

3/2 => NH-ΔH , 4/3 => ΔH-NH , 9/8 => NH-ΠA , 32/27 => KE-NH,
256/243 => ZΩ-NH

Εύκολα τώρα μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι 6 τόνοι δίνουν διάστημα μεγαλύτερο του διαπασών αφού $3^{12}/2^{18} > 2$ ή με άλλα λόγια αν προχωρήσουμε 6 τόνους από το NH ο φθόγγος που θα φτάσουμε θα έχει μεγαλύτερη συχνότητα (κραδασμό) από το NH' αφού $3^{12}/2^{19} > 1$

Αυτή η διαφορά ($3^{12}/2^{19}$) ονομάστηκε «πυθαγόρειο κόμμα» και κατά Πτολεμαίο ταιριάζει να είναι το διάστημα 74/73.

$$\text{Πυθαγόρειο κόμμα} \quad 3^{12}/2^{19} = 531441 / 524288 = 1,0136$$

Αν συνεχίσουμε ανεβαίνοντας άλλους 6 τόνους η διαφορά θα διπλασιαστεί και θα γίνει περίπου 37/36 κατά Πτολεμαίο.

$$\Delta \nu \text{ πυθαγόρεια κόμματα } 3^{24}/2^{38} = 282429536481 / 274877906944 = \\ 1,0275 \text{ περίπου } 37/36 \text{ (κατά Πτολεμαίο).}$$

Να επισημάνουμε εδώ ότι αυτό το διάστημα απέχει από το 1/4 του τόνου ($4^{\text{η}}$ ρίζα του $9/8 = 1,0299$) λίγο πολύ 4cents (μόνο νεαρά άτομα μπορούν να αντιληφθούν τη διαφορά των δυο διαστημάτων). Από την εναρμόνια δίεση μόλις 1,8cents (τετραγωνική ρίζα του $256/243 = 1,0264$). Έτσι μπορούμε να θεωρήσουμε ως εναρμόνια δίεση το παραπάνω διάστημα.

$$\text{Εναρμόνια δίεση } 3^{24}/2^{38} = 282429536481 / 274877906944 = 1,0275$$

Αν το λείμμα αφαιρεθεί από τον μείζων τόνο προκύπτει η **«αποτομή»**.

$$(3^2/2^3) / (2^8/3^5) = 3^7/2^{11}$$

$$\text{Αποτομή } 3^7/2^{11} = 2187/2048 = 1,0679$$

Αν την αναλύσουμε βλέπουμε ότι προκύπτει αν ανέβουμε ένα μείζων τόνο πάνω από τον ΖΩ και αντί να φτάσουμε στο ΝΗ που απέχει λείμμα από τον ΖΩ φτάνουμε σε φθόγγο κατά μια αποτομή πάνω από τον ΝΗ (ΝΗ#).

Στη συνέχεια αφαιρώντας μια αποτομή από το τριημίτονο προκύπτει ένας τόνος μικρότερος του μείζονα έστω ο **«φυσικός τόνος»**. Ας μας επιτραπεί να τον ονομάσουμε έτσι μια και αποτελεί την πυθαγόρεια έκφραση του διδυμικού $10/9$ που βρίσκεται μόλις 1.9 cents δίπλα του (φυσικό τόνο αναφέρουν τον διδυμικό οι Ευρωπαίοι).

$$(2^5/3^3) / (3^7/2^{11}) = 2^{16}/3^{10}$$

$$\text{Φυσικός τόνος } 2^{16}/3^{10} = 65536/59049 = 1,1099$$

Εύκολα διακρίνουμε ότι ο τόνος αυτός συνίσταται από 2 λείμματα και μαζί με 5 μείζων τόνους συμπληρώνει το διαπασών ακριβώς.

$$(3^2/2^3)^5 * (2^{16}/3^{10}) = (3^{10}/2^{15}) * (2^{16}/3^{10}) = 2$$

Ακόμα παρατηρούμε ότι ένας μείζων τόνος, ένας φυσικός τόνος και μια αποτομή συνιστούν συλλαβή (4κ).

$$(3^2/2^3) * (2^{16}/3^{10}) * (3^7/2^{11}) = 2^2/3$$

Τι θα μείνει όμως αν από ένα φυσικό τόνο αφαιρεθεί μια αποτομή; Θα φανερωθεί ένα διάστημα που είναι τόσο μικρότερο από το λείμμα όσο η αποτομή είναι μεγαλύτερη από το λείμμα.

$$(2^{16}/3^{10}) : (3^7/2^{11}) = 2^{27}/3^{17}$$

Αυτό το διάστημα είναι σχεδόν ίσο με το 1/3 του τόνου αφού η Τρίτη ρίζα του 9/8 είναι ίσο με 1,040 ενώ $2^{27}/3^{17} = 1,0393$. Η διαφορά είναι μόλις 1,2 cents. Έτσι μπορούμε να θεωρήσουμε αυτό το διάστημα ως το 1/3 του τόνου. Αυτό το διάστημα αναφέρεται από τους αρχαίους ως «χρωματική δίεση»

$$\text{Χρωματική δίεση} \quad 2^{27}/3^{17} = \frac{134217728}{129140163} = 1,0393$$

Το διάστημα αυτό προκύπτει αν προχωρήσουμε 8 τόνους στη σειρά και μια πέμπτη καθαρή. Φτάνουμε τότε στο φθόγγο $Z\Omega$ ανεβασμένο κατά ένα πυθαγόρειο κόμμα έστω $Z\Omega'$. Η απόσταση αυτού του $Z\Omega'$ από το διπλανό NH είναι 1/3 του τόνου. $Z\Omega' - NH = 1/3$ του τόνου.

Αν τώρα αφαιρέσουμε μια χρωματική δίεση από τον μείζων τόνο θα σχηματίσουμε τα 2/3 του τόνου.

$$3^2/2^3 : 2^{27}/3^{17} = 3^{19}/2^{30}$$

Αυτό το διάστημα προκύπτει αν από το προηγούμενο $Z\Omega'$ ανέβουμε ένα τόνο και φτάσουμε στον ΠΑ (κατεβασμένο τόσο ώστε να σχηματίζει 2/3 του τόνου με τον διπλανό NH). Αυτό το διάστημα αναφέρεται ως «ελάχιστος τόνος» (η Επιτροπή των υπολογίζει ως 27/25).

$$\text{Ελάχιστος τόνος} \quad 3^{19}/2^{30} = \frac{1162261467}{1073741824} = 1,0824$$

Αυτός ο τόνος συμπληρώνει το τριημίτονο με έναν άλλο τόνο μικρότερο του μείζονα και του φυσικού τόνου που μπορούμε να τον ονομάσουμε «ελάσσων τόνο» (η Επιτροπή των υπολογίζει ως 800/729).

$$2^5/3^3 : 3^{19}/2^{30} = 2^{35}/3^{22}$$

$$\text{Ελάσσων τόνος } 2^{35}/3^{22} = 34359738368 / 31381059609 = 1,0949$$

Προκύπτει αν πάρουμε 11 τόνους στη σειρά και φτάσουμε σε ένα KE τόσο αυξημένο που να σχηματίζει με τον επόμενο NH έναν τέτοιο τόνο.

Ας συνοψίσουμε τώρα όλα τα διαστήματα που έχουν παραχθεί.

Ισο	1	1	1
Διαπασών	2	2	2
Διαπέντε	3/2	3 / 2	1,5
Διατέσσερα	2 ² /3	4 / 3	1,3333
Τριημίτονο	2 ⁵ /3 ³	32 / 27	1,1852
Μείζων Τόνος	3 ² /2 ³	9 / 8	1,125
Φυσικός τόνος	2 ¹⁶ /3 ¹⁰	65536 / 59049	1,1099
Ελάσσων τόνος	2 ³⁵ /3 ²²	34359738368 / 31381059609	1,0949
Ελάχιστος τόνος	3 ¹⁹ /2 ³⁰	1162261467 / 1073741824	1,0824
Αποτομή	3 ⁷ /2 ¹¹	2187 / 2048	1,0679
Λείμα	2 ⁸ /3 ⁵	256 / 243	1,0535
Χρωματική δίεση	2 ²⁷ /3 ¹⁷	134217728 / 129140163	1,0393
Εναρμόνια δίεση	3 ²⁴ /2 ³⁸	282429536481 / 274877906944	1,0275
Πυθαγόρειο κόμμα	3 ¹² /2 ¹⁹	531441 / 524288	1,0136

Όλα τα παραπάνω διαστήματα που είναι μικρότερα του μείζων τόνου μπορεί να έχουν το φθόγγο του ίσου (NH) βάση ή κορυφή. Στην πρώτη περίπτωση το 2 είναι στον παρανομαστή και στην δεύτερη στον αριθμητή. Παρατηρούμε τα πρώτα να λειτουργούν ως **ανιόντα** και τα δεύτερα ως **κατιόντα**. Κάθε ανιόν μπορεί να υπολογιστεί και ως κατιόν και το αντίστροφο. Έτσι προκύπτει ο παρακάτω πίνακας:

Ίσο	1	1
Διαπασών	2	2
Διαπέντε	3/2	3 / 2
Διατέσσερα	$2^2/3$	$2^2/3$
Τριημίτονο	$2^5/3^3$	$2^5/3^3$
Μείζων Τόνος	$3^2/2^3$	$2^{81}/3^{51}$
Φυσικός τόνος	$2^{16}/3^{10}$	$3^{43}/2^{68}$
Ελάσσων τόνος	$2^{35}/3^{22}$	$3^{31}/2^{49}$
Ελάχιστος τόνος	$3^{19}/2^{30}$	$2^{54}/3^{34}$
Αποτομή	$3^7/2^{11}$	$2^{73}/3^{46}$
Λείμμα	$2^8/3^5$	$3^{48}/2^{76}$
Χρωματική δίεση	$2^{27}/3^{17}$	$3^{36}/2^{57}$
Εναρμόνια δίεση	$3^{24}/2^{38}$	$2^{46}/3^{29}$
Πυθαγόρειο κόμμα	$3^{12}/2^{19}$	$2^{65}/3^{41}$

Τα διαστήματα κάθε ζευγαριού διαφέρουν κατά $3^{53}/2^{84}$ δηλαδή περίπου 3.6cents. Αυτό το διάστημα είναι στο όριο αντίληψης των νεαρών ατόμων όπως είδαμε και παραπάνω και προκύπτει αν πάρουμε 26 τόνους στη σειρά και μια πέμπτη και φτάσουμε σε ένα φθόγγο μόλις 3.6cents οξύτερο του φθόγγου του ίσου. Αν όμως κάποιοι μπορούν να αντιληφθούν τόσο μικρή διαφορά στην οξύτητα σίγουρα κανείς δεν μπορεί να την αποδώσει με τη φωνή του.

Ας επιτραπεί να αποκαλούμε το παρακάτω διάστημα «**Ανοχή**».

Ανοχή = $3^{53}/2^{84}$

Αν το πυθαγόρειο κόμμα οδηγεί σε συγκερασμούς μικρότερους των εκατό μορίων η ανοχή οδηγεί σε συγκερασμό κοντά στα 300 μόρια.

Χρησιμοποιώντας τώρα τον παραπάνω πίνακα μπορούμε να δούμε ότι το λείμμα με την αποτομή, ο ελάχιστος τόνος με τη χρωματική δίεση, ο ελάσσων τόνος με την εναρμόνια δίεση και ο φυσικός τόνος με το πυθαγόρειο κόμμα συμπληρώνουν κάθε φορά ένα μείζων τόνο. Ακόμα ότι αν προσθέσουμε ένα Πυθαγόρειο κόμμα σε κάθε άλλο διάστημα μικρότερο του τόνου θα προκύψει το μεγαλύτερο του.

Λείμμα + Αποτομή = Μείζων τόνος :

$$2^8/3^5 * 3^7/2^{11} = 3^2/2^3 = 9/8$$

Ελάχιστος τόνος + Χρωματική δίεση = Μείζων τόνος :

$$3^{19}/2^{30} * 2^{27}/3^{17} = 3^2/2^3 = 9/8$$

Ελάσσων τόνος + Εναρμόνια δίεση = Μείζων τόνος :

$$2^{35}/3^{22} * 3^{24}/2^{38} = 3^2/2^3 = 9/8$$

Φυσικός τόνος + Πυθαγόρειο κόμμα = Μείζων τόνος :

$$2^{16}/3^{10} * 3^{12}/2^{19} = 3^2/2^3 = 9/8$$

Πυθαγόρειο κόμμα + Εναρμόνια δίεση = Χρωματική δίεση :

$$3^{12}/2^{19} * 2^{46}/3^{29} = 2^{27}/3^{17}$$

Πυθαγόρειο κόμμα + Χρωματική δίεση = Λείμμα :

$$3^{12}/2^{19} * 2^{27}/3^{17} = 2^8/3^5$$

Πυθαγόρειο κόμμα + Λείμμα = Αποτομή :

$$3^{12}/2^{19} * 2^8/3^5 = 3^7/2^{11}$$

Πυθαγόρειο κόμμα + Αποτομή = Ελάχιστος τόνος :

$$3^{12}/2^{19} * 3^7/2^{11} = 3^{19}/2^{30}$$

Πυθαγόρειο κόμμα + Ελάχιστος τόνος = Ελάσσων τόνος :

$$3^{12}/2^{19} * 2^{54}/3^{34} = 2^{35}/3^{22}$$

Πυθαγόρειο κόμμα + Ελάσσων τόνος = Φυσικός τόνος :

$$3^{12}/2^{19} * 2^{35}/3^{22} = 2^{16}/3^{10}$$

12. ΚΑΤΑΤΟΜΗ ΤΟΥ ΚΑΝΟΝΑ ΜΕ ΧΡΗΣΗ ΤΟΥ ΠΕΜΠΤΟΥ ΑΡΜΟΝΙΚΟΥ

Μια πιο μοντέρνα άποψη στον υπολογισμό των διαστημάτων κάνει χρήση του 5^{ου} αρμονικού (BOY με βάση τον NH) τον οποίο θεωρεί συμφωνία. Αυτή η άποψη αποδίδεται στον Δίδυμο τον Αλεξανδρεύ (63π.χ-10μ.χ). Έτσι μπορούμε να «βαφτίσουμε» αυτά τα διαστήματα ως «**διδυμικά**» (αναφέρονται και ως «φυσικά») για ευκολία στον διαχωρισμό από αυτά που βασίζονται μόνο στους δυο πρώτους αρμονικούς που θα τα αναφέρουμε ως «**πυθαγόρεια**». Προκύπτουν έτσι διαστήματα που εκτός από δυνάμεις του 2 και του 3 στον αριθμητή ή τον παρανομαστή περιέχουν και δυνάμεις του 5. Έτσι ξεκινώντας από το δίτονο ως 5/4 προκύπτουν νέα διαστήματα όπως το 10/9 ($5/4 : 9/8 = 10/9$) που απέχει μόλις 1,95cents από τον πυθαγόρειο φυσικό τόνο που είδαμε πριν και το 16/15 ($4/3 : 5/4 = 16/15$) που απέχει εξίσου 1,95 cents από την απότομη. Ο 10/9 ($((2*5)/3)^2$) αναφέρεται επίσης ως ελάσσων τόνος (ευρωπαϊκός) και το διάστημα 16/15 ($2^4/(3*5)$) ως αποτομή ή ημιτόνιο. Η διαφορά αυτή των 1.95 cents ανάμεσα στα διαστήματα που συναντήσαμε πριν και αυτά εδώ τώρα ονομάζεται «**Σχίσμα**» και το υπολογίζουμε ως $2^{15}/(3^8*5)$.

$$\text{Σχίσμα από Ελάσσονες τόνους} : 2^{16}/3^{10} : (2*5)/3^2 = 2^{15}/(3^8*5)$$

$$\text{Σχίσμα από αποτομές} : 3^7/2^{11} : 2^4/(3*5) = 2^{15}/(3^8*5)$$

Η διαφορά του μείζων τόνου 9/8 από τον ελάσσων (ευρωπαϊκό) 10/9 ονομάζεται «**κόμμα συντονισμού**» και δίδεται από τον λόγο 81/80 ή $3^4/(2^4*5)$ και απέχει βέβαια ένα Σχίσμα από το Πυθαγόρειο κόμμα.

Το σχίσμα είναι αμφίβολο αν μπορεί να διακριθεί από κάποιον άνθρωπο. Για αυτό μπορούμε να θεωρήσουμε τα διαστήματα που έχουν διαφορά σχίσματος ως πρακτικά ίσα.

Ακολουθεί ανάλογος πίνακας με τα νέα διαστήματα που είναι μικρότερα του μείζων τόνου.

Φυσικός τόνος	$(2^*5)/3^2$	10/9	1,1111
Ελάσσων τόνος	$(2^5*5^2)/3^6$	800/729	1,0974
Ελάχιστος τόνος	$3^3/5^2$	27/25	1,0800
Αποτομή	$2^4/(3*5)$	16/15	1,0667
Λείμα	$2^8/3^5$	256 / 243	1,0535
Χρωματική δίεση	$5^2/(3*2^3)$	25/24	1,0417
Εναρμόνια δίεση	$(3^4/(2^4*5))^2 \text{ ή} (2*5^3)/3^5$	6561/6400 ή 250/243	1,0252 ή 1,0288
Κόμμα συντονισμού	$3^4/(2^4*5)$	81/80	1,0125

Συγκρίνοντας τους δυο πίνακες βλέπουμε ότι τα κόμματα, οι αποτομές, και οι φυσικοί τόνοι (πυθαγόρειοι και διδυμικοί) διαφέρουν ένα Σχίσμα. Το λείμα είναι το ίδιο ενώ οι διέσεις καθώς και οι ελάχιστοι και οι ελάσσων τόνοι διαφέρουν κατά δυο Σχίσματα $((5^2*3^{16})/2^{30}$ που ισοδυναμούν με 3,91cents (όσο μια ανοχή).

Τέλος ακολουθεί μια «πτολεμαϊκή» προσέγγιση των διαστημάτων που αναφέραμε.

Μείζων Τόνος	9/8
Φυσικός τόνος	10/9
Ελάσσων τόνος	12/11 ή 11/10 (ή 23/21)
Ελάχιστος τόνος	13/12
Αποτομή	16/15
Λείμα	20/19 ή 19/18
Χρωματική δίεση	26/25 ή 25/24
Εναρμόνια δίεση	41/40 έως 37/36
Πυθαγόρειο κόμμα	81/80 έως 74/73

13. ΑΝΑΖΗΤΩΝΤΑΣ ΤΟΝ ΚΑΤΑΛΛΗΛΟ ΣΥΓΚΕΡΑΣΜΟ

Όπως είδαμε η διαίρεση του διαπασών σε 36, 68 ή 72 κομμάτια παρουσιάζει προβλήματα στην ακρίβεια αρκετών διαστημάτων.

Προκειμένου τώρα να ανακαλύψουμε την κατάλληλη διαίρεση θα πρέπει να δώσουμε βαρύτητα στη σχέση του μείζων τόνου με το λείμμα. Θεωρώντας λοιπόν την μονάδα (βήμα-κόμμα) του συγκερασμένου συστήματος ως «ω» (κραδασμό μεγαλύτερο του ίσου), θα πρέπει κάθε διάστημα «χ» να μπορεί με ικανοποιητική ακρίβεια να εκφραστεί ως $\chi = \omega^v$ όπου για κάθε χ αντιστοιχεί ένα v που πρέπει να είναι ακέραιος και επειδή αυτό είναι μάλλον αδύνατο, έστω να βρίσκεται όσο πιο κοντά γίνεται σε κάποιον ακέραιο. Έστω λοιπόν ότι χρειαζόμαστε ν φορές το ω για να εκφράσουμε το λείμμα και μ φορές το ω για να εκφράσουμε τον τόνο. Θα ισχύει: $\omega^v = 256/243$ και $\omega^\mu = 9/8$ με τη χρήση λογαρίθμων θα έχουμε:

$$\log \omega^v = \log (256/243) \text{ και } \log \omega^\mu = \log (9/8)$$

βάση της θεωρίας των λογαρίθμων θα ισχύει:

$$v * \log \omega = \log (256/243) \text{ και } \mu * \log \omega = \log (9/8)$$

διαιρώντας τις δυο εξισώσεις έχουμε:

$$\mu/v = (\log (9/8)) / (\log (256/243)) = 2,26$$

δίνοντας τώρα ακέραιες τιμές στο v ξεκινώντας από το 1 περιμένουμε να πάρουμε τιμές του μ πολύ κοντά σε κάποιον ακέραιο

$v=1$	$\mu=2,26$	
$v=2$	$\mu=4,52$	
$v=3$	$\mu=6,78$	σφάλμα 13%
$v=4$	$\mu=9,04$	σφάλμα 0,45%
$v=5$	$\mu=11,30$	σφάλμα 5,9%
$v=6$	$\mu=13,5$	σφάλμα 13%
$v=7$	$\mu=15,8$	
$v=8$	$\mu=18,08$	
$v=23$	$\mu=51,98$	σφάλμα 4,4%
$v=50$	$\mu=113,00084 !!!$	σφάλμα 7,4%

Φαίνεται ότι η αναλογία του τόνου με το λείμμα δίνεται με καταπληκτική ακρίβεια από τους αριθμούς 113 προς 50. Έτσι όμως το διαπασών θα αποτελείται από 665 μόρια ($113*5 + 50*2$). Το βήμα αυτής της διαίρεσης αντιστοιχεί στο διάστημα του **σχίσματος** (1.95 cents).

Η επόμενη πολλή καλή σχέση είναι 52 προς 23 που δίνει 306 μόρια για το διαπασών ($52*5 + 23*2$). Το βήμα της τελευταίας διαίρεσης αντιστοιχεί στο διάστημα της **ανοχής** (3.6 cents).

Οι δυο αυτές αναλογίες δεν έχουν πρακτική εφαρμογή στα υπάρχοντα μουσικά όργανα μια και ήδη τα 72 μόρια θεωρούνται πολλά για αυτό και η Πατριαρχική επιτροπή είχε προτείνει τα 36 όπως αναφέραμε.

Για λείμμα 3 ή 6 μόρια (προκύπτουν 36 και 72 μόρια αντίστοιχα) το σφάλμα υπολογίζεται περίπου 13% και δίνεται τόνος 6,78 και 13,5 μόρια αντίστοιχα. Άλλα και με λείμμα 5 μόρια προκύπτει τόνος 11,3 μόρια, με σφάλμα 5,9%.

Η σχέση που φαίνεται να κερδίζει και σε πρακτικότητα και σε ακρίβεια είναι αυτή που δίνει τόνο 9.04 μόρια για λείμμα 4 μόρια. Αν θεωρήσουμε τον τόνο 9 μόρια το σφάλμα είναι μόνο 0,45 % ή 4,5‰. Το διαπασών σε αυτή την περίπτωση θα αποτελείται από 53 μόρια ($9*5 + 4*2$) που δεν είναι ούτε τόσο πολλά όσο τα 72, ούτε τόσο λίγα όσο τα 36. Το βήμα αυτής της διαίρεσης αντιστοιχεί στο **πυθαγόρειο κόμμα** ή το **κόμμα συντονισμού** (22 cents).

Αυτό το σύστημα διαίρεσης της οκτάβας που αναφέρεται και ως «**μερκατορικό**» χρησιμοποιείται στην θεωρία της τούρκικης, αρμένικης και αραβοπερσικής μουσικής (που τόσο μοιάζει με τη δική μας) και είχε προταθεί και στην Ευρώπη την εποχή του J.S.Bach χωρίς να γίνει όμως αποδεκτό από τους κύκλους των μουσικών μια και οι ευρωπαίοι δέχτηκαν να χρησιμοποιούν την διαίρεση του διαπασών σε 12 μόνο κομμάτια.

Το ενδιαφέρων σε αυτή την διαίρεση είναι ότι όλα τα διαστήματα που υπολογίσαμε προηγουμένως (ιδιαίτερα τα πυθαγόρεια δηλαδή αυτά που προκύπτουν με χρήση του δεύτερου και τρίτου αρμονικού) απέχουν τόσο λίγο από αυτά που δίνονται από την διαίρεση του διαπασών σε 53 κομμάτια, που η διαφορά δεν γίνεται αντιληπτή μια και είναι τις περισσότερες φορές μικρότερη του Σχίσματος.

Όμως το σύστημα μπορεί να παράγει και τα πτολεμαϊκά **7/6** (12 κόμματα) και **8/7** (10 κόμματα) με ακρίβεια λίγο μικρότερη από όση το σύστημα δια 12 ή 36 ή 72 επιτυγχάνει στον μείζονα τόνο

Ακολουθούν πίνακες για να συγκρίνουμε πόσο τα πυθαγόρεια αλλά και τα διδυμικά διαστήματα απέχουν από τα διαστήματα που προκύπτουν από τις διαιρέσεις του διαπασών σε 72 και 53 κομμάτια.

Το ότι με τη διαίρεση του διαπασών σε 72 (ή 36) κομμάτια δεν έχουμε ακρίβεια στην απόδοση των διαστημάτων είναι βέβαια φανερό. Ακόμα, πολύ συχνά, η απόκλιση σε διαστήματα που προκύπτουν από πρόσθεση των παραπάνω διαστημάτων όπως τα διαστήματα διατρία (3Μ και 3μ) διαέξι (6Μ και 6μ) και διαεπτά (7Μ και 7μ) θα είναι συχνά μεγαλύτερη.

ΔΙΑΣΤΗΜΑ	ΛΟΓΟΣ ΣΥΧΝΟΤΗΤΩΝ (ΚΛΑΣΜΑ)	ΛΟΓΟΣ ΣΥΧΝΟΤΗΤΩΝ (ΚΛΑΣΜΑ)	ΛΟΓΟΣ ΣΥΧΝΟΤΗΤΩΝ (ΔΕΚΑΔΙΚΟΣ)	ΒΗΜΑ ΔΙΑΠΑΣΩΝ / 53	ΛΟΓΟΣ ΒΗΜΑΤΟΣ	ΑΠΟΚΛΙΣΗ (ΔΕΚΑΔΙΚΗ)	ΑΠΟΚΛΙΣΗ (CENTS)
Ίσο	1	1	1,0000	0	1,00000	1,00000	0,00
Πυθαγόρειο κόμμα	$3^{12}/2^{19}$	531441 / 524288	1,0136	1	1,01316	1,00047	0,82
Εναρμόνια δίεση	$3^{24}/2^{38}$	282429536481 / 274877906944	1,0275	2	1,02650	1,00095	1,64
Χρωματική δίεση	$2^{27}/3^{17}$	134217728 / 129140163	1,0393	3	1,04001	1,00067	1,16
Λείμμα	$2^8/3^5$	256 / 243	1,0535	4	1,05371	1,00020	0,34
Αποτομή	$3^7/2^{11}$	2187 / 2048	1,0679	5	1,06758	1,00028	0,48
Ελάχιστος τόνος	$3^{19}/2^{30}$	1162261467 / 1073741824	1,0824	6	1,08163	1,00075	1,30
Ελάσσων τόνος	$2^{35}/3^{22}$	34359738368 / 31381059609	1,0949	7	1,09587	1,00087	1,50
Φυσικός τόνος	$2^{16}/3^{10}$	65536 / 59049	1,1099	8	1,11030	1,00039	0,68
Μείζων Τόνος	$3^2/2^3$	9/8	1,1250	9	1,12491	1,00008	0,14
Τριημίτονο	$2^5/3^3$	32 / 27	1,1852	13	1,18533	1,00012	0,20
Διατέσσερα	4/3	4/3	1,3333	22	1,33339	1,00004	0,07
Διαπέντε	3/2	3/2	1,5000	31	1,49994	1,00004	0,07
Διαπασών	2	2	2,0000	53	2,00000	1,00000	0,00

ΔΙΑΣΤΗΜΑ	ΛΟΓΟΣ ΣΥΧΝΟΤΗΤΩΝ (ΚΛΑΣΜΑ)	ΛΟΓΟΣ ΣΥΧΝΟΤΗΤΩΝ (ΚΛΑΣΜΑ)	ΛΟΓΟΣ ΣΥΧΝΟΤΗΤΩΝ (ΔΕΚΑΔΙΚΟΣ)	ΒΗΜΑ ΔΙΑΠΑΣΩΝ / 53	ΛΟΓΟΣ ΒΗΜΑΤΟΣ	ΑΠΟΚΛΙΣΗ (ΔΕΚΑΔΙΚΗ)	ΑΠΟΚΛΙΣΗ (CENTS)
Κόμμα συντονισμού	$3^4/(2^4*5)$	81/80	1,0125	1	1,01316	1,00066	1,14
Εναρμόνια δίεση	$(3^4/(2^4*5))^2$ $(2^*5^3)/3^5$	6561/6400 250/243	1,0252 1,0288	2 2	1,02650 1,02650	1,00127 1,00224	2,20 3,87
Χρωματική δίεση	$5^2/(3^2*2^3)$	25/24	1,0417	3	1,04001	1,00162	2,80
Λείμμα	$2^8/3^5$	256 / 243	1,0535	4	1,05371	1,00020	0,34
Αποτομή	$2^4/(3*5)$	16/15	1,0667	5	1,06758	1,00082	1,42
Ελάχιστος τόνος	$3^3/5^2$	27/25	1,08	6	1,08163	1,00151	2,61
Ελάσσων τόνος	$(2^5*5^2)/3^6$	800/729	1,0974	7	1,09587	1,00140	2,42
Φυσικός τόνος	$(2*5)/3^2$	10/9	1,1111	8	1,11030	1,00072	1,25
Μείζων Τόνος	$3^2/2^3$	9/8	1,1250	9	1,12491	1,00008	0,14
Τριημίτονο	$2^5/3^3$	32 / 27	1,1852	13	1,18533	1,00012	0,20
Διατέσσερα	4/3	4/3	1,3333	22	1,33339	1,00004	0,07
Διαπέντε	3/2	3/2	1,5000	31	1,49994	1,00004	0,07
Διαπασών	2	2	2,0000	53	2,00000	1,00000	0,00

ΔΙΑΠΑΣΩΝ / 72
ΠΥΘΑΓΟΡΕΙΑ

ΔΙΑΣΤΗΜΑ	ΛΟΓΟΣ ΣΥΧΝΟΤΗΤΩΝ (ΚΛΑΣΜΑ)	ΛΟΓΟΣ ΣΥΧΝΟΤΗΤΩΝ (ΚΛΑΣΜΑ)	ΛΟΓΟΣ ΣΥΧΝΟΤΗΤΩΝ (ΔΕΚΑΔΙΚΟΣ)	ΒΗΜΑ ΔΙΑΠΑΣΩΝ / 72	ΒΗΜΑΤΟΣ	ΛΟΓΟΣ (ΔΕΚΑΔΙΚΗ)	ΑΠΟΚΛΙΣΗ (CENTS)
Τσο	1	1	1,0000	0	1,00000	1,00000	0,00
Πυθαγόρειο κόμμα	3 ¹² /2 ¹⁹	531441 / 524288	1,0136	1	1,00967	1,00393	6,79
Εναρμόνια δίεση	3 ²⁴ /2 ³⁸	282429536481 / 274877906944	1,0275	3	1,02930	1,00178	3,08
Χρωματική δίεση	2 ²⁷ /3 ¹⁷	134217728 / 129140163	1,0393	4	1,03926	1,00006	0,10
Λείμμα	2 ⁸ /3 ⁵	256 / 243	1,0535	5	1,04931	1,00399	6,89
Λείμμα	2 ⁸ /3 ⁵	256 / 243	1,0535	6	1,05946	1,00566	9,78
Αποτομή	3 ⁷ /2 ¹¹	2187 / 2048	1,0679	7	1,06971	1,00172	2,98
Ελάχιστος τόνος	3 ¹⁹ /2 ³⁰	1162261467 / 1073741824	1,0824	8	1,08006	1,00220	3,81
Ελάσσων Τόνος	2 ³⁵ /3 ²²	34359738368 / 31381059609	1,0949	9	1,09051	1,00405	6,99
Ελάσσων Τόνος	2 ³⁵ /3 ²²	34359738368 / 31381059609	1,0949	10	1,10106	1,00561	9,68
Φυσικός τόνος	2 ¹⁶ /3 ¹⁰	65536 / 59049	1,1099	11	1,11171	1,00167	2,88
Μείζων Τόνος	3 ² /2 ³	9/8	1,1250	12	1,12246	1,00226	3,91
Τριημίτονο	2 ⁵ /3 ³	32 / 27	1,1852	18	1,18921	1,00339	5,87
Διατέσσερα	4/3	4/3	1,3333	30	1,33484	1,00113	1,96
Διαπέντε	3/2	3/2	1,5000	42	1,49831	1,00113	1,96
Διαπασών	2	2	2,0000	72	2,00000	1,00000	0,00

ΔΙΑΠΑΣΩΝ / 72
ΔΙΔΥΜΙΚΑ

ΔΙΑΣΤΗΜΑ	ΛΟΓΟΣ ΣΥΧΝΟΤΗΤΩΝ (ΚΛΑΣΜΑ)	ΛΟΓΟΣ ΣΥΧΝΟΤΗΤΩΝ (ΚΛΑΣΜΑ)	ΛΟΓΟΣ ΣΥΧΝΟΤΗΤΩΝ (ΔΕΚΑΔΙΚΟΣ)	ΒΗΜΑ ΔΙΑΠΑΣΩΝ / 72	ΒΗΜΑΤΟΣ	ΛΟΓΟΣ (ΔΕΚΑΔΙΚΗ)	ΑΠΟΚΛΙΣΗ (CENTS)
Τσο	1	1	1,0000	0	1,00000	1,00000	0,00
Κόμμα συντονισμού	3 ⁴ /(2 ⁴ *5)	81/80	1,0125	1	1,00967	1,00280	4,84
Εναρμόνια δίεση	(3 ⁴ /(2 ⁴ *5)) ² ή (2 ⁵ ³)/3 ⁵	6561/6400 ή 250/243	1,0252 ή 1,0288	3	1,02930	1,00400	6,91
Χρωματική δίεση	5 ² /(3*2 ³)	25/24	1,0417	4	1,03926	1,00235	4,06
Λείμμα	2 ⁸ /3 ⁵	256 / 243	1,0535	5	1,04931	1,00399	6,90
Λείμμα	2 ⁸ /3 ⁵	256 / 243	1,0535	6	1,05946	1,00566	9,77
Αποτομή	2 ⁴ /(3*5)	16/15	1,0667	7	1,06971	1,00282	4,88
Ελάχιστος τόνος	3 ³ /5 ²	27/25	1,08	8	1,08006	1,00006	0,10
Ελάσσων τόνος	(2 ⁵ *5 ²)/3 ⁶	800/729	1,0974	10	1,10106	1,00333	5,76
Φυσικός τόνος	(2*5)/3 ²	10/9	1,1111	11	1,11171	1,00055	0,95
Μείζων Τόνος	3 ² /2 ³	9/8	1,1250	12	1,12246	1,00226	3,91
Τριημίτονο	2 ⁵ /3 ³	32 / 27	1,1852	18	1,18921	1,00339	5,87
Διατέσσερα	4/3	4/3	1,3333	30	1,33484	1,00113	1,96
Διαπέντε	3/2	3/2	1,5000	42	1,49831	1,00113	1,96
Διαπασών	2	2	2,0000	72	2,00000	1,00000	0,00

14. ΤΙ ΔΕΝ ΜΑΣ ΕΙΠΑΝ ΓΙΑ ΤΟΝ ΧΡΥΣΑΝΘΟ

Αυστηρή κριτική στον Χρύσανθο, ασκεί η Πατριαρχική Επιτροπή, για τις σχέσεις των τόνων που επιχειρεί να δώσει με μόρια. Η κριτική συνεχίστηκε μέχρι τις μέρες μας λες και ο Χρύσανθος είναι υπεύθυνος για όλα τα δεινά της μουσικής μας. Πως θα ήταν σήμερα η μουσική μας αν δεν ήταν ο Χρύσανθος; Τι θα είχε απομείνει; Η Επιτροπή και όλοι αυτοί που ασκούν κριτική ξεχνούν το μέγεθος αυτού του άνδρα και της εργασίας που πρόσφερε σε εμάς. Αληθινά όλοι οι μουσικοί πως μπορούμε να κρίνουμε ένα πραγματικά ανώτερο πνεύμα σταθμό πλέον στην παγκόσμια ιστορία της μουσικής;

Θα προσπαθήσω να επαναφέρω τα πράγματα στη θέση τους αν και δεν είμαι ο πρώτος.

Στο πρόλογο του θεωρητικού του ο Σίμωνας Καράς αναφέρεται στην κατάσταση που δημιουργήθηκε από τον Χρύσανθο και την Επιτροπή και μάλιστα κατακρίνει την Επιτροπή για την δική της στάση απέναντι στον Χρύσανθο. Παραλείπει όμως αργότερα να μιλήσει σχολαστικά και αυτό ίσως οφείλεται στην δική του σύγχυση περί του γενικότερου προβλήματος του συγκερασμού. Η εργασία του Καρά είναι πολύ σημαντική καθώς καταγράφει την ζώσα παράδοση κάνοντας ακριβή περιγραφή των ήχων και των διαστημάτων που αυτοί χρησιμοποιούν. Δεν φοβάται να μιλήσει για 6,5 μόρια ή 5,5 μόρια και άλλα τέτοια. Είναι σαν να αφήνει το συγκερασμό των 72 τμημάτων για τη θεωρία και δέχεται διαστήματα που εισήγαγε η Επιτροπή (πχ 800/729), καταγράφει όμως και διαστήματα που χρησιμοποιούνται στην πράξη της εξωτερικής μουσική -στο λαούτο για παράδειγμα- που είναι συνήθως πτολεμαϊκά.

Έχοντας στα χέρια μας αυτό το εργαλείο που φανέρωσε η εργασία αυτή δυνάμεθα να διορθώσουμε τα διαστήματα και τα μόρια που δίνει ο Καράς προσαρμόζοντας τα στο μερκατορικό σύστημα.

Αλλά ας επανέλθουμε στον Χρύσανθο. Μεγάλωσε, όπως όλοι εκείνα τα χρόνια, μέσα στην ζωντανή μουσική παράδοση του λαού μας. Γνώριζε βέβαια και ευρωπαϊκή μουσική, όμως τα ακούσματα από την παράδοση, πιστεύω, ήταν πιο βαθιά χαραγμένα μέσα του από ότι σε εμάς σήμερα. Αυτό διότι από την εποχή του το συγκερασμένο σύστημα των ευρωπαίων

κατακλύζει τον πλανήτη ασταμάτητα – σήμερα 24 ώρες το 24ωρο μέσω του ραδιοφώνου και της τηλεόρασης.

Είναι λογικό, λοιπόν, να μην τηρούνται στην εποχή μας τα διαστήματα που χρησιμοποιούσαν μέσω ακουστικής παράδοσης την εποχή του Χρύσανθου, μια και το συγκερασμένο σύστημα γενιά με την γενιά εισχωρεί στην μουσική παράδοση και την εκκλησιαστική μουσική και αδυνατίζει την μνήμη της αίσθησης κάθε ήχου με τα διαστήματά του. Και αν αυτό το παρατηρεί η Πατριαρχική Επιτροπή πριν την αυγή του 20^{ου} αιώνα τι θα έπρεπε να πούμε σήμερα...

Όταν ο Χρύσανθος θέλησε να μιλήσει για την σχέση των διαστημάτων σκέφτηκε ότι αυτό αφορούσε κυρίως τα όργανα. Το γεγονός ότι η θεωρία των ήχων από τότε ακολουθεί μόρια και κόμματα πρέπει να μας δείχνει την προτροπή του Χρύσανθου για την χρήση των οργάνων στην μελέτη και εξάσκηση της μουσικής προκειμένου να έχουμε όσο πιο επιστημονική ακρίβεια γίνεται.

Η επαφή με την τούρκικη και την ανατολίτικη παρόμοια μουσική δίνει μια εικόνα της ποικιλίας των χρωμάτων των διάφορων δρόμων με τις μικροδιαφορές στα διαστήματα. Όμως τι παράξενο, ενώ η τούρκικη θεωρία της μουσικής βασίζεται στο μερκατόρικο σύστημα (οκτάβα δια 53) στην πράξη οι Τούρκοι χρησιμοποιούν το σύστημα διαίρεσης σε 72 μόρια.(αυτό φαίνεται από τις θέσεις που έχουν τα μανταλάκια στα κανονάκια τους). Ισως για λόγους συμβατότητας με την Ευρωπαϊκή μουσική πράξη. Επίσης η τούρκικη μουσική με την συχνή χρήση «φυσικών» διαστημάτων έχει φιλήδονο και ερωτικό άκουσμα και δεν ταιριάζει στην δική μας εκκλησιαστική μουσική παρά μόνο ίσως στην εξωτερική.

Ο Χρύσανθος μας εισάγει στην λογική των μορίων χωρίς (όπως φαίνεται με την πρώτη ματιά) ο ίδιος να έχει κατανοήσει απόλυτα τη λειτουργία τους. Χωρίς να χρησιμοποιεί λογαρίθμους και λογαριθμικές κλίμακες δοκιμάζει με τεχνάσματα μια προσέγγιση και ίσως αφήνει και ένα μήνυμα για το μέλλον.

Θα αναρωτιέται κανείς πως ο Χρύσανθος δίνει ακριβή μόρια για τους τρεις τόνους (12,9,7) χωρίς να αναφέρει ότι τόσα είναι περίπου. Αποδεικνύει μάλιστα τούτο σε υπομνήματα. Όμως όπως είδαμε τα μόρια

Θα έπρεπε να ήταν άλλα. Ο Χρύσανθος φαίνεται δεν ήξερε τι ήταν αυτό που εισήγαγε ή κουτούλησε πάνω στο πρόβλημα του συγκερασμού και το τελικό αποτέλεσμα ήταν να μπερδευτεί πολύ κόσμος που ήθελε να χρησιμοποιήσει τα μόρια μόνο στην θεωρία και όχι στα όργανα. Διότι αν κάποιος ακολουθήσει τις οδηγίες του Χρύσανθου θα μπορέσει με ακρίβεια να παράγει τον 9/8 ή τον 12/11 σε ένα ταμπουρά απλώς δεν θα ξέρει ακριβώς ποια θα είναι η σχέση των μορίων. Ο Χρύσανθος ουσιαστικά μίλησε για μήκη-μόρια με την ευχή ότι αυτοί που θα τα χρησιμοποιήσουν στα όργανα θα ακολουθήσουν τις οδηγίες του και όχι τις αποδείξεις των υπομνημάτων και οι υπόλοιποι θα έχουν μια περίπου εικόνα της ποσοτικής σχέσης των διαστημάτων. Ας αλλάξουν θα σκέφτηκε τα νούμερα αλλά ας μην αλλάξουν τις αναλογίες όσοι λύσουν το πρόβλημα του συγκερασμού. Ο Χρύσανθος είχε πολλά να πει. Δεν μπορούσε να τα αφήσει όλα για να λύνει μαθηματικά προβλήματα. Έκανε ότι ήταν δυνατό για να περιγράψει πως ένα όργανο μπορεί να αποδώσει τους ήχους με όσο καλύτερη ακρίβεια γινόταν.

Δεν ξέρουμε αν ο Ταμπουράς του Χρύσανθου ήταν δικός του ή κάποιου συνεργάτη του. Είμαι όμως σχεδόν σίγουρος ότι πρέπει να είχε μήκος χορδής 108cm. ; Έτσι διαιρώντας σε 9 μέρη έπαιρνε τον μείζονα τόνο και έδενε τον δεσμό στα 108/9=12cm. Διαιρώντας σε 12 μέρη έπαιρνε τον ελάσσονα τόνο και τον έδενε λίγο πιο πριν από τον μείζονα στα 108/12=9cm. Θα είδε σίγουρα (φαίνεται στο υπόμνημα) ότι στο όργανο τα μήκη-μόρια μικραίνουν έτσι ώστε αν μοίραζε τα 8/9 της χορδής σε 12 μέρη για να δέσει τον ελάσσονα τόνο μετά τον μείζονα, αυτός θα καταλάμβανε 8 cm πάνω στο όργανο. Κατάλαβε ότι το 8 δεν τον εξυπηρετεί στην σύγκριση των δυο τόνων και στην κατασκευή κλιμάκων των ήχων με μόρια. Σίγουρα επίσης φαντάστηκε ότι τα 9 μόρια του ελάσσων τόνου δεν θα ήταν ακριβώς τόσα - αφού αλλάζει ανάλογα σε ποιο σημείο του οργάνου θα τοποθετούταν το δεσμός - σκέφτηκε όμως ότι στην ανοικτή χορδή θα είχε τα πιο αξιόπιστα αποτελέσματα που θα μπορούσε. Όντως είδαμε ότι για 12 μόρια μείζων τόνο έχουμε οκτάβα 70,66 μόρια και τόνο ελάσσονα 8,86 μόρια πράγμα που δίνει δίκαιο και λογική στον Χρύσανθο να επιλέξει το 12 προς 9 αντί του 12 προς 8 στην σχέση των δυο μεγάλων τόνων.

Πάμε τώρα στη σχέση του μείζονα τόνου προς τον ελάχιστο. Ο Χρύσανθος την δίνει ως 12 προς 7 ενώ είδαμε ότι είναι 12 προς 8,46

μόρια. Γεγονός είναι ότι ο Χρύσανθος θεωρούσε τον ελάχιστο τόνο ως αυτό που απέμενε - μετά την τοποθέτηση των δυο τόνων μείζονα και ελάσσονα διαδοχικά στο όργανο - μέχρι την συμπλήρωση της συλλαβής. Δένει λοιπόν δεσμό στο $\frac{1}{4}$ της χορδής και το διάστημα από το τέλος του ελάσσονα τόνου μέχρι εκεί προκύπτει να αντιστοιχεί σε μήκος χορδής 7cm ακριβώς. $(108/4)-12-8=27-12-8=7\text{cm}$.

Θα έπρεπε να μην παραλείψει να μας πει ότι η σχέση μείζονα και ελάσσονα τόνου σε μήκος ίδιας χορδής είναι 12 προς 9 και η σχέση μείζονα με ελάχιστον τόνου αν τοποθετηθούν πάνω στο όργανο (ταμπουράς) και παρεμβληθεί ένας τόνος ελάσσων, είναι 12 προς 7 σε μήκος πάλι χορδής.

Θα τα ήξερε όλα αυτά πιστεύω ο Χρύσανθος όμως άφησε έτσι τα πράγματα χωρίς να μπει στον κόπο να κάνει μια αναφορά τουλάχιστον και να πει ότι στην ουσία η σχέση είναι 12-9-8,5 περίπου. Δεν το έκανε ίσως φοβούμενος την σύγχυση των 8,5 μορίων και το πολύπλοκο του όλου θέματος. Ίσως όμως ακόμα θέλησε να αφήσει ένα μήνυμα ότι η σχέση ελάσσονα και ελάχιστον δεν είναι τόσο μικρή όσο 9 προς 8,5 με τον μείζονα τόσο μεγαλύτερο και από τους δυο. Ίσως δηλαδή ήθελε να μας πει ότι τα πραγματικά διαστήματα δεν είναι αυτά που αντιπροσωπεύουν οι απλοί λόγοι 12/11 και 88/81 που περισσεύει αλλά μάλλον τέτοια διαστήματα που θα ταίριαζαν καλύτερα στη σχέση 12-9-7. Η πράξη των οργάνων ήθελε τη χρήση του 12/11 ή του 11/10 και κανενός άλλου διαστήματος στην περιοχή διότι είναι απλό να μοιράσεις μια χορδή σε 11 ή 12 μέρη ενώ ένα διάστημα όπως το 800/729 που προτείνει η επιτροπή για τον ελάσσονα τόνο βρίσκεται ανάμεσα στα δυο παραπάνω, όμως, θέλει πιο πολλούς υπολογισμούς για να το σημειώσουμε και ακόμα αποστηθίζεται δύσκολα από κάποιον πρακτικό οργανοπαίκτη. Έτσι λοιπόν ο Χρύσανθος ανάμεσα στον 12/11 και τον 11/10 επέλεξε τον πρώτο ως πιο απομακρυσμένο από τον 10/9 που ήθελε να αποφύγει και βρίσκεται πολύ κοντά στον 11/10.

Πρέπει όμως να λάβουμε υπόψη μας ότι οι παραδοσιακοί μουσικοί χρησιμοποιούν μεν πτολεμαϊκά διαστήματα για να βρίσκουν γρήγορα την θέση των δεσμών, όμως στην πράξη διορθώνουν και με το αυτί τους. Έτσι ο δεσμός των 12/11 ή μάλλον των 22/27 πιθανόν να διορθωνόταν προχωρώντας τον δεσμό λίγο πιο κάτω προς τον δεσμό που θα όριζε τον

11/10. Εκεί δηλαδή που βρίσκεται το 7^ο μερκατορικό κόμμα. Έτσι διατηρείται και μια ίδια απόσταση ασφαλείας ανάμεσα στα 2/3 του τόνου (ελάχιστος) και στον διδυμικό τόνο 10/9 εκατέρωθεν δηλαδή του δεσμού του ελάσσονα τόνου.

Ενγνωμονώντας τον Χρύσανθο ανακαλύπτουμε τώρα, ότι η σχέση των τόνων 12-9-7 στα 68 μήκη-μόρια, αντιστοιχεί στην σχέση 9-7-6 στα 53 μερκατορικά μόρια. Η δε πρόταση του για την κλίμακα του Β' ήχου όπου δηλώνει τόνο μείζονα στην μέση ως 7-12-7 είναι πιθανότατα η περίπτωση 7-9-6 ή η πολύ σχετική της 6-10-6. Εδώ έχουμε αυξημένο τόνο όμως ο Χρύσανθος θεωρεί στο δικό του σύστημα μείζων τόνο και τα 12 και τα 13 μήκη-μόρια. Παρατηρούμε ακόμα ότι η κλίμακα του Β' ήχου του Χρύσανθου είναι απόλυτα διατονική και μάλιστα διαφέρει από την κλίμακα του Α' ήχου μόνο στην ανταλλαγή της θέσης ανάμεσα στον μείζονα και στον ελάσσονα τόνο αν δεχτούμε την πρώτη από τις παραπάνω επιλογές.

15. ΕΝ ΚΑΤΑΚΛΕΙΔΙ

Η διαίρεση του διαπασών σε 53 μέρη δίνει την πιο ακριβή προσέγγιση στα διάφορα διαστήματα που προκύπτουν ως λείμματα αν δεχτούμε την ύπαρξη του διαστήματος 3/2 και την χρήση του στην κλίμακα. Αυτά τα διαστήματα και η αντιστοιχία τους σε μόρια είναι.

Μόρια Διάστημα

1	Πυθαγόρειο κόμμα
2	Εναρμόνια δίεση (τοις πολλοίς αδύνατο να αποδοθεί)
3	Χρωματική δίεση (1/3 του τόνου)
4	Λείμμα (Πυθαγόρειας κατατομής του κανόνα)
5	Αποτομή
6	Ελάχιστος τόνος (2/3 του τόνου)
7	Ελάσσων τόνος
8	Φυσικός τόνος
9	Μείζων τόνος
13	Τριημίτονο
22	Διατέσσερα (4Κ ή Συλλαβή κατά τους Αρχαίους)
31	Διαπέντε (5Κ ή Διοξεία κατά τους Αρχαίους)
53	Διαπασών (8Κ ή οκτάβα)

Οι δυνατές τριφωνίες (συλλαβές) που το σύστημα μπορεί να δημιουργήσει είναι πολλές. Έχοντας στο μυαλό μας το «παν μέτρον άριστον» των αρχαίων μπορούμε να αναφέρουμε τις εξής:

Εναρμόνιες τριφωνίες

2 18 2 (πυκνό ίσο με ένα λείμμα – Πολύ δύσκολη παραλλαγή Σπάθης)

3 17 2 (πυκνό ίσο με μια αποτομή – Δύσκολη παραλλαγή Σπάθης)

Χρωματικές τριφωνίες

3 16 3 (Το πυκνό αυτό δείχνεται στην Σπάθη ως Δη# 3 Κε 3 Ζωb)

4 15 3 (πλ Β' Ήχου κατά την Πατριαρχική Επιτροπή αν ακολουθήσουμε τα διαστήματα που δίνει)

4 14 4

4 13 5 (πυκνό ίσο με μείζων τόνο - πλ Β' κατά τον Καρά καθώς λέει 5,5 - 18 - 6,5)

6 13 3 (πυκνό ίσο με μείζων τόνο - πλ Β' κατά τον Χρύσανθο)

5 12 5 (πτολεμαϊκά ενδιαφέρων ως 16/15 - 7/6 - 16/15)

6 12 4

6 11 5 (το πυκνό ισούται με μισή συλλαβή άρα μπορεί να θεωρηθεί και διατονική τριφωνία)

Διατονικές τριφωνίες

6 11 5 (Β' ήχου κατά Καρά καθώς λέει 7,5 – 14 – 6,5)

6 10 6 (πιθανή για Β' ήχο κατά Χρύσανθο καθώς λέει «ελάχιστος ...?....ελάχιστος»)

7 10 5

7 9 6 (πιθανή για Β' ήχο κατά Χρύσανθο καθώς αναφέρει μείζων τόνο ανάμεσα)

9 7 6 (το δικό μας διατονικό γένος)

7 8 7

8 7 7

9 8 5 (Δημιουργεί την φυσική κλίμακα του Γρηγοριανού μέλους και της Δυτικής φωνητικής και οργανικής πολυφωνίας – πτολεμαϊκά ενδιαφέρων ως 9/8 – 10/9 – 16/15)

8 9 5

9 9 4 (Προκύπτει η αρχαία κλίμακα του Πυθαγόρα με μείζονες τόνους και λείμματα)

Όλες οι παραπάνω τριφωνίες μπορούν να χρησιμοποιηθούν και στον τροχό και στο διαπασών σύστημα. Στο τελευταίο, μάλιστα, μπορούμε να κάνουμε και συνδυασμούς.

Έτσι, όταν για παράδειγμα ο πλ Α' χρησιμοποιεί την εναρμόνια φθορά βαδίζει στην κλίμακα

Πα 7 Βου 6 Γα 9 Δι 9 Κε 4 Ζω 9 Νη 9 Πα

Στην εκκλησιαστική μουσική που θα πρέπει να είναι η πιο αυστηρή μάλλον πρέπει να αποφεύγουμε τα 8 και τα 5 μόρια (10/9 και 16/15) καθώς προτείνουν και οι δάσκαλοι του νέου συστήματος γραφής και φαίνεται ότι τα πιο κατάλληλα είναι τα εξής λαμβάνοντας υπόψη τον Χρύσανθο, την Επιτροπή, τον Καρά και το όργανο ελέγχου της εργασίας αυτής που είναι ένας ταμπουράς μήκους χορδής 68 cm.

Διατονικό γένος :

Νη 9 Πα 7 Βου 6 Γα 9 Δι 9 Κε 7 Ζω 6 Νη

Χρωματικό γένος πλ Β':

Πα 6 Βου 13 Γα 3 Δι 9 Κε 6 Ζω 13 Νη 3 Πα

Χρωματικό γένος Β' ήχου :

Νη 7 Πα 9 Βου 6 Γα 9 Δι 7 Κε 9 Ζω 6 Νη

ή

Νη 6 Πα 10 Βου 6 Γα 9 Δι 6 Κε 10 Ζω 6 Νη

Εναρμόνιο γένος Γ' ήχου :

Νη 9 Πα 9 Βου 4(2) Γα 9 Δι 9 Κε 4 Ζω 9 Νη

(Με τον Βου να δέχεται έλξη και να πλησιάζει στα 2 μόρια τον Γα)

|.....||.....||....||.....||.....||....||.....||....||.....||....||.....||....|

ΤΕΛΟΣ

(ΠΡΩΤΗΣ
ΠΡΟΧΕΙΡΗΣ
ΔΗΜΟΣΙΕΥΣΗΣ)

16. ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. **ΠΛΑΤΩΝΟΣ** «ΤΙΜΑΙΟΣ» ή «ΠΕΡΙ ΦΥΣΕΩΣ»
2. **ΑΡΙΣΤΟΞΕΝΟΥ** «ΑΡΜΟΝΙΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ»
3. **ΝΙΚΟΜΑΧΟΥ ΓΕΡΑΣΗΝΟΥ ΤΟΥ ΠΥΘΑΓΟΡΕΙΟΥ** «ΑΡΜΟΝΙΚΟ ΕΓΧΕΙΡΙΔΙΟ»
4. **FLORA R. LEVIN** “THE MANUAL OF HARMONICS OF NICOMACHUS THE PYTHAGOREAN “
TRANSLATION AND COMMENTARY
PHANES PRESS 1994 - ISBN 0 933999 42 49 / ISBN 0 933999 43 7
5. **ANDREW BARKER** “SCIENTIFIC METHOD IN PTOLEMY’S HARMONICS”
CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS - ISBN 0 521 55372 5
6. **ΣΟΛΩΝΑ ΜΙΧΑΗΛΙΔΗ** «ΕΓΚΥΚΛΟΠΑΙΔΕΙΑ ΤΗΣ ΑΡΧΑΙΑΣ ΕΛΛΗΝΙΚΗΣ ΜΟΥΣΙΚΗΣ»
ΜΟΡΦΩΤΙΚΟ ΙΔΡΥΜΑ ΕΘΝΙΚΗΣ ΤΡΑΠΕΖΗΣ - 1981
7. **ΦΟΙΒΟΥ ΑΝΩΓΕΙΑΝΑΚΗ** «ΕΛΛΗΝΙΚΑ ΜΟΥΣΙΚΑ ΟΡΓΑΝΑ»
ΕΘΝΙΚΗ ΤΡΑΠΕΖΑ ΤΗΣ ΕΛΛΑΔΟΣ - ΑΘΗΝΑ 1976
8. **ΧΡΥΣΑΝΘΟΥ ΤΟΥ ΕΚ ΜΑΔΥΤΩΝ** «ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΚΑΙ ΜΕΓΑ ΘΕΩΡΗΤΙΚΟΝ ΤΗΣ ΜΟΥΣΙΚΗΣ
9. **ΠΑΤΡΙΑΡΧΙΚΗΣ ΕΠΙΤΡΟΠΗΣ 1881** «ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΗΣ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΤΗΣ ΕΚΚΛΗΣΙΑΣΤΙΚΗΣ ΜΟΥΣΙΚΗΣ ΕΚΠΟΝΗΘΕΙΣΑ ΕΠΙ ΤΗ ΒΑΣΗ ΤΟΥ ΨΑΛΤΗΡΙΟΥ»
10. **ΣΙΜΩΝΟΣ Ι. ΚΑΡΑ** «ΜΕΘΟΔΟΣ ΕΛΛΗΝΙΚΗΣ ΜΟΥΣΙΚΗΣ – ΘΕΩΡΗΤΙΚΟΝ ΤΟΜΟΙ Α κ’ Β»
ΣΥΛΛΟΓΟΣ ΠΡΟΣ ΔΙΑΔΟΣΙΝ ΤΗΣ ΕΛΛΗΝΙΚΗΣ ΜΟΥΣΙΚΗΣ ΑΘΗΝΑ 1982
11. **ΑΛΛΑ ΘΕΩΡΗΤΙΚΑ** ΠΑΛΑΙΑ ΚΑΙ ΝΕΑ (Π. ΑΓΑΘΟΚΛΕΟΥΣ, Δ. ΠΑΝΑΓΙΩΤΟΠΟΥΛΟΥ Γ. ΧΑΤΖΗΘΕΟΔΩΡΟΥ κ. α.)
12. **TELEMAN’S** “NEW MUSIC SYSTEM”
<http://www.xs4all.nl/~huygensf/doc/telemann.html>
13. **ΔΗΜΗΤΡΗ ΛΕΚΚΑ** «Η ΒΑΣΗ ΤΗΣ ΔΙΑΣΤΗΜΑΤΙΚΗΣ» και «ΜΕΡΚΑΤΟΡΙΚΗ ΚΙΘΑΡΑ»
ΑΡΘΡΑ ΣΤΟ ΠΕΡΙΟΔΙΚΟ «ΤΑΡ» (1987 ~ 1988)
14. **ΝΙΚΟ ΣΤΕΦΑΝΙΔΗΣ** (Ο ΑΝΘΡΩΠΟΣ ΜΕ ΤΟ ΚΑΝΟΝΑΚΙ) ΑΦΙΕΡΩΜΑ ΤΟΥ ΠΕΡΙΟΔΙΚΟΥ «ΤΑΡ» (1987 ~ 1988)

ΜΑΚΡΑΚΗΣ Ν ΔΗΜΗΤΡΙΟΣ

ΗΡΑΚΛΕΙΟ - ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΣ 2008